أكثر من دراجتين غير صالحة.

ب) يريد هذا التاجر أن يكون احتمال الحصول على الأقل على دراجة غير صالحة أصغر من 50% . عين عندئذ القيمة الأعظمية للعدد n حيث n عدد الدراجات التي يستطيع طلبها.

4- المتغير العشوائي الذي يرفق بكل دراجة منتجة مدة حياتها بالأعوام يتبع قانونا أسيا وسيطه $0,0007$ أي دالة كثافة احتماله المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=0,0007\times e^{-0,0007x}$.

احسب احتمال أن تكون مدة حياتها محصورة بين 500 و 600 يوم بتقريب 10^{-3}

32 - دراسة حول عدد تدخلات الحماية المدنية أجريت خلال مدة 200 أسبوع، وهذا لغرض معرفة أكثر الأيام تدخلا، نتائجها في الجدول التالي:

السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
26	27	29	39	30	23	26

هل نستطيع بعتبة مجازفة 10% القول أن هناك تساوي احتمال في عدد التدخلات بين أيام الأسبوع؟ لهذا الغرض استعملنا نتائج 6000 محاكاة لتجربة تتمثل في اختيار يوم من الأسبوع عشوائيا خلال 200 أسبوع.

ولكل محاكاة حسبنا قيمة d^2. السلسلة الإحصائية لـ d^2 نتائجها مدونة في الجداول التالي:

D_1	Q_1	Me	Q_3	D_9
0,0015	0,0015	0,0025	0,0061	0,0072

ماذا تستنتج؟

33 - نرمي 60 مرة حجر النرد.

1) عين التواترات المتحصل عليها لكل وجه باستعمال قانون تساوي الاحتمال

2) رمينا حجر النرد 60 مرة على التتابع فتحصلنا على النتائج التالية:

وجه الحجر	1	2	3	4	5	6
التكرار	13	8	9	10	7	13

احسب d^2 مجموع مربعات الفروق بين التواترات النظرية والتواترات الملاحظة.

3) بمحاكاة التجربة السابقة (رمي حجر النرد 60 مرة) 1000 و 2000 مرة حسبنا لكل محاكاة قيمة d^2 فكانت النتائج هي:

عدد المرات	1000	2000
D_9	0,16665	0,16665

ماذا يمكن القول حول هذا الحجر (هل هو مغشوش أم لا؟).

الدرس 10

الأعداد المركبة (قسم أول)

تمهيد

ندرس كيف أنه من دراسة حل المعادلات اضطررنا إلى توسيع مفهوم مجموعات الأعداد.

- المعادلة $x+2=0$ ليس لها حلول في $\mathbb{N}$ وهذا ما قادنا إلى إنشاء مجموعة جديدة أوسع لـ $\mathbb{N}$ بحيث تصبح للمعادلة $x+2=0$ حلول في هذه المجموعة والتي نرمز لها $\mathbb{Z}$

- المعادلة $2x+3=0$ ليس لها حلول في $\mathbb{Z}$ وهذا ما قادنا إلى إنشاء مجموعة جديدة أوسع لـ $\mathbb{Z}$ بحيث تكون للمعادلة $2x+3=0$ حلول في هذه المجموعة التي نرمز لها بـ $\mathbb{Q}$

- المعادلة $x^2=-1$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ لذلك لجأنا إلى إنشاء مجموعة أوسع لـ $\mathbb{R}$ بحيث تكون لمعادلتنا حلول في هذه المجموعة الجديدة.

خطرت لبعض الرياضيين فكرة تعريف أعداد ليست حقيقية وإعطاء معنى لـ $\sqrt{-1}$ وفي منتصف القرن الثامن عشر (1777) اقترح العالم "أولر" استبدال $\sqrt{-1}$ بـ i حيث i يمثل الحرف الأول من كلمة " imaginaire " إذن $i^2=-1$.

العالم "دالمبار" بين أن كل عناصر المجموعة الجديد هي من الشكل $a+ib$ مع a و b عددين حقيقيين والتي تسمى مجموعة الأعداد المركبة (Complexe) و يرمز لها بـ $\mathbb{C}$.

- كما مثلنا كل مجموعة الأعداد الحقيقية على مستقيم نستطيع تمثيل الأعداد الحقيقية والمركبة في مستوي بحيث أن كل نقطة منه تحدد بفاصلتها a وترتيبتها b والتي تمثل العدد $a+ib$ وهذا المستوي يسمى بالمستوي المركب.

❶ . مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

نعرف مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، تمديدا لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، المزودة بعمليتي الجمع والضرب اللتين لهما نفس الخواص كما في $\mathbb{R}$.

a و b عددان حقيقيان، المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى بالمستوي المركب.

I و J نقطتان إحداثياتهما $(1,0)$ و $(0,1)$ على الترتيب.

1.1 نقط المستوي و الأعداد المركبة

تعريف ❶

نرفق النقطة I بالعدد الحقيقي 1 ونرفق النقطة J بالعدد المركب i بحيث $i^2=-1$.

نرفق بكل نقطة M إحداثياتها (a,b) من المستوي المركب العدد المركب الوحيد الذي نرمز له بـ Z والذي يكتب $Z=a+ib$

عكسيا نرفق بكل عدد مركب $Z=a+ib$ النقطة M الوحيدة من المستوي المركب التي إحداثياتها (a,b)

ونقول عندئذ أنه يوجد تقابل بين مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ومجموعة نقاط المستوي.

تسمية

نسمي النقطة $M(a,b)$ صورة العدد المركب Z ويسمى بلاحقة النقطة M ونرمز له بـ Z_M

تعريف ❷

نرفق بكل شعاع $\overrightarrow{OM}(a,b)$ العدد المركب $Z=a+ib$ والذي يسمى لاحقة هذا الشعاع وعكسيا نرفق بكل عدد مركب $Z=a+ib$ الشعاع الذي مركباته (a,b) والذي يسمى شعاع الصورة لـ Z ويرمز له بـ $Z_{\overrightarrow{OM}}$.

مثال ـ ♦

1) لتكن الأعداد المركبة Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، Z_4 حيث :
$Z_1=2$ ، $Z_2=3i$ ، $Z_3=1-i$ ، $Z_4=-2-3i$ ولتكن M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 صورها على الترتيب. مثل هذه النقط في المستوي المركب.

2) اعط الأعداد المركبة الممثلة بالنقطتين $M_5(3,6)$ ، $M_6(-1,5\,;\,3)$.

الحل ✓

1) $M_1(2,0)$ ، $M_3(1,-1)$
$M_2(0,3)$ ، $M_4(-2,-3)$

2) العدد المركب الممثل لـ M_5 هو $Z_5=3+6i$
- العدد المركب الممثل لـ Z_6 هو $Z_6=-1{,}5+3i$

2.1 الشكل الجبري لعدد مركب

تعريف

الكتابة $Z=a+ib$ لعدد مركب حيث a و b عددين حقيقيين تسمى الشكل الجبري (أو الديكارتي) لـ Z.

- يسمى a بالجزء الحقيقي لـ Z وترمز له بـ $\mathrm{Re}(z)$
- يسمى b بالجزء التخيلي لـ Z ونرمز له بـ $\mathrm{Im}(z)$
- القول ان العدد المركب Z حقيقي يعني ان $\mathrm{Im}(z)=0$
- القول أن العدد المركب Z تخيلي صرف يعني ان $\mathrm{Re}(z)=0$
- محور الفواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- محور التراتيب يمثل مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة.
- نقول عن عددين مركبين أنهما متساويان إذا كانا ممثلين بنفس النقطة اي لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.

$a+ib=a'+ib'$ يكافئ $a=a'$ و $b=b'$.

$a+ib=0$ يكافئ $a=0$ و $b=0$.

3.1 قواعد الحساب في $\mathbb{C}$

Z و Z' عددان مركبان بحيث $Z=a+ib$ و $Z'=a'+ib'$

أ) $Z+Z'=(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$

ب) $Z\times Z'=(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$

جـ) $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

د) $Z^2+Z'^2=(Z-iZ')(Z+iZ')$

و) إذا كان $Z\neq 0$ فإن مقلوب العدد Z هو $\frac{1}{Z}$ بحيث $\frac{1}{Z}=\frac{1}{a+ib}$

في الشكل الجبري لعدد مركب لا يسمح بترك i في المقام ولكتابة $\frac{1}{Z}$ على الشكل الجبري نضرب البسط والمقام في $a-ib$ فنجد $\frac{1}{Z}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$. ⇒

هـ) من اجل $Z'\neq 0$ يكون $\frac{Z}{Z'}=(a+ib)\times\frac{1}{a'+ib'}$.

تمرين تدريبي ❶

عين العددين الحقيقيين x و y بحيث $(x+2y)+i(x-3y)=2$ .... (I)

✓ الحل

المساواة (I) تكتب بالصيغة $(x+2y)+i(x-3y)=2+i\times 0$

وهذه الأخيرة تكافئ $\begin{cases} x+2y=2 & \text{....... (1)} \\ x-3y=0 & \text{....... (2)} \end{cases}$ .... (II)

من (2) نجد $x=3y$ نعوض x في (1) نجد $5y=2$ ومنه $y=\frac{2}{5}$

إذن $x=\frac{6}{5}$ وبالتالي $(x,y)=\left(\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right)$.

تمرين تدريبي ❷

اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة $Z_1=\frac{1}{i}$ ، $Z_2=1+3i-(2+4i)$

$Z_3=(5-2i)^2$ ، $Z_4=\frac{2+i}{-1+3i}$

✓ الحل

$$Z_1=\frac{1}{i}=\frac{-i\times 1}{0^2+1^2}=\frac{-i}{1}=-i$$

$$Z_2=1+3i-2-4i=(1-2)+(3-4)i=-1-i$$

$$Z_3=25-20i+4i^2=25-20i-4=21-20i$$

$$Z_4=(2+i)\times\frac{1}{-1+3i}=(2+i)\times\frac{-1-3i}{(-1)^2+3^2}=\frac{(2+i)(-1-3i)}{10}=\frac{-2-6i-i-3i^2}{10}$$

$$=\frac{-2-7i+3}{10}=\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$$

تمرين تدريبي ❸

ليكن $z=x+iy$ و $Z=\frac{z-i}{z+i}$ حيث z عدد مركب يختلف عن $-i$

1) عين الشكل الجبري لـ Z.

2) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z حقيقي.

3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z تخيلي صرف.

✓ الحل

1) $Z=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$

$$=\frac{[x^2+(y+1)(y-1)]+i[-x(y+1)+x(y-1)]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\,\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

2) Z حقيقي هذا معناه ان $\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}=0$ اي $-2x=0$ و $x^2+(y+1)^2\neq 0$

اي $x=0$ و $(x,y)\neq(0,-1)$

ومنه مجموعة النقط M بحيث Z حقيقي هي المستقيم ذو المعادلة $x=0$ ما عدا النقطة $A(0,-1)$.

3) Z تخيلي صرف هذا معناه ان $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}=0$

اي $x^2+y^2-1=0$ و $(x,y)\neq(0,-1)$.

ومنه مجموعة النقط M بحيث Z تخيلي صرف هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ ماعدا النقطة $A(0,-1)$.

❷. اللواحق و الهندسة

Z_A و Z_B لاحقتا النقطتين A و B على الترتيب. $Z_{\overrightarrow{AB}}$ لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

$Z_{\vec{u}}$ ، $Z_{\vec{v}}$ لاحقتي الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ على الترتيب و k عدد حقيقي.

لدينا :

أ) $Z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

ب) $Z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$

جـ) $Z_{k\vec{u}}=k\,Z_{\vec{u}}$

د) لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

لدينا $Z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$ و $Z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

البرهان

أ) الشعاع $\overrightarrow{AB}$ مركباته هي $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

إذن :

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)$$
$$=(x_B+iy_B)-(x_A+iy_A)=z_B-z_A$$

(ب) و (جـ) و (د) تبرهن بنفس الكيفية السابقة.

تمرين تدريبي 1

نعطي ثلاث نقط A ، B ، C لواحقها $1+2i$ ، $3+2i$ ، $3+5i$ على الترتيب.

1) ما هي لواحق الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ؟

2) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع.

الحل ✓

1) $Z_{\overrightarrow{BA}} = z_A - z_B = 1+2i-3-2i = -2$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 3+5i-3-2i = 3i$

2) $ABCD$ متوازي اضلاع يعني أن $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ أي $Z_{\overrightarrow{DC}}=Z_{\overrightarrow{AB}}$ أي $z_C - z_D = z_B - z_A$

ومنه نستنتج $3+5i-z_D=2$ إذن $z_D=1+5i$

تمرين تدريبي 2

لتكن A ، B ، C ، A' ، B' ، C' نقط من المستوي لواحقها على التوالي:
$2-i$ ، $3+3i$ ، $4+i$ ، $3i$ ، $4-i$ ، $5+i$.

ا) بين أن $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

ب) بين أن مركزي ثقل المثلثين ABC ، $A'B'C'$ متطابقان.

الحل ✓

ا) $Z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{A'} - z_A = -2+4i$

$Z_{\overrightarrow{BB'}} = z_{B'} - z_B = 1-4i$

$Z_{\overrightarrow{CC'}} = z_{C'} - z_C = 1$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$ هي $1+(1-4i)+(-2+4i)$ أي 0

وعليه $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

ب) لتكن G مركز ثقل ABC و G' مركز الثقل $A'B'C'$

$Z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{9+3i}{3} = 3+i$

$Z_{G'} = \frac{z_{A'}+z_{B'}+z_{C'}}{3} = \frac{9+3i}{3} = 3+i$

بما أن $Z_G = Z_{G'}$ فإن النقطة G منطبقة على G'.

3. مرافق عدد مركب

3 . 1 تعريف

مرافق العدد المركب $Z=a+ib$ مع a و b عددان حقيقيان، هو العدد المركب الذي نرمز له بـ $\overline{Z}$ و المعرف بـ $\overline{Z}=a-ib$ ويقرأ $\overline{Z}$ " Z بار"

التفسير الهندسي

النقطة M' ذات اللاحقة $\overline{Z}=a-ib$ هي نظيرة النقطة M ذات اللاحقة $Z=a+ib$ بالنسبة إلى محور الفواصل.

مثال .

مرافق $1+i$ هو $1-i$

مرافق $-i$ هو i

مرافق $-1-3i$ هو $-1+3i$

مرافق 2 هو 2



نتائج

Z و Z' عددان مركبان

1) $Z=Z'$ يكافئ $\overline{Z}=\overline{Z'}$

2) $Z=\overline{\overline{Z}}$ (مرافق مرافق Z هو Z)

3) إذا كان $Z=a+ib$ و a و b عددان حقيقيان فإن $Z+\overline{Z}=2a$ و $Z-\overline{Z}=2bi$

أي $Z+\overline{Z}=2\,\mathrm{Re}(Z)$ و $Z-\overline{Z}=2i\,\mathrm{Im}(Z)$

4) Z حقيقي يكافئ $Z=\overline{Z}$

Z تخيلي صرف يكافئ $Z+\overline{Z}=0$

5) إذا كان $Z=a+ib$ فإن $Z\overline{Z}=a^2+b^2$.

3 . 2 خواص

ا) مرافق مجموع عددين مركبين هو مجموع مرافقيهما أي $\overline{Z+Z'}=\overline{Z}+\overline{Z'}$

ب) مرافق جداء عددين مركبين هو جداء مرافقيهما أي $\overline{ZZ'}=\overline{Z}\times\overline{Z'}$

جـ) مرافق حاصل قسمة عددين مركبين هو حاصل قسمة مرافقيهما ؛

أي $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)}=\frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$ مع $Z'\neq 0$

الإثبات

ليكن $Z=a+ib$ و $Z'=a'+ib'$ عددان مركبان.

$\overline{Z+Z'} = \overline{(a+a')+i(b+b')} = (a+a')-i(b+b')$

$=(a-ib)+(a'-ib')=\overline{Z}+\overline{Z'}$

نبرهن (ب) و (جـ) بنفس الكيفية السابقة.

ملاحظة

نتائج الخاصية السابقة تمتد إلى مجموع n حدا أو جداء n عاملا وبالأخص $\overline{(Z^n)}=(\overline{Z})^n$

تمرين تدريبي 1

ليكن Z و Z' عددان مركبان حيث $Z=\frac{2+i}{1-i}$ و $Z'=\frac{2-i}{1+i}$

بين بدون حساب ان $Z+Z'$ حقيقي و $Z-Z'$ تخيلي صرف.

الحل

$$\overline{Z}=\overline{\left(\frac{2+i}{1-i}\right)}=\frac{2-i}{1+i}=Z'$$

$$\overline{Z+Z'}=\overline{Z}+\overline{Z'}=Z'+\overline{\overline{Z}}=Z'+Z$$

ومنه $Z+Z'$ حقيقي

$$\overline{Z-Z'}+Z-Z'=\overline{Z}-\overline{Z'}+Z-Z'=Z'-Z+Z-Z'=0$$

ومنه $Z-Z'$ تخيلي صرف.

تمرين تدريبي 2

حل المعادلتين ذواتي المجهول Z التاليتين:

أ) $3\overline{Z}+2-i=-i\overline{Z}-1$ .... (I)

ب) $Z^2-3\overline{Z}+2=0$ .... (II)

الحل

أ) المعادلة (I) تكافئ $3Z+2+i=iZ-1$ بنقل المجاهيل إلى طرف والمعالم إلى طرف نجد:

$(i-3)Z=2+i+1$ ومنه $Z=\frac{3+i}{i-3}$.

$$Z=\frac{3+i}{-3+i}\times\frac{-3-i}{-3-i}=\frac{(-9+1)+i(-3-3)}{(-3)^2+(-1)^2}=\frac{-8-6i}{10}=\frac{-4}{5}-\frac{3}{5}i$$

ب) بوضع $Z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان:

المعادلة المعطاة تكافئ $(x+iy)^2-3(x-iy)+2=0$

وهذه الأخيرة تكافئ $\begin{cases}x^2-y^2-3x+2=0\\2xy+3y=0\end{cases}$ اي $\begin{cases}x^2-y^2-3x+2=0\\ \text{و}\\ y(2x+3)=0\end{cases}$

وهذا يعني $\begin{cases}x^2-y^2-3x+2=0\\ (y=0)\ \text{أو}\ \left(x=\frac{-3}{2}\right)\end{cases}$

ومنه نستنتج $\begin{cases}x^2-y^2-3x+2=0\\ \text{و}\\ x=\frac{-3}{2}\end{cases}$ أو $\begin{cases}x^2-y^2-3x+2=0\\ \text{و}\\ y=0\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-y^2-3x+2=0\\ \text{و}\\ x=\frac{-3}{2}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}y=\sqrt{\frac{17}{4}}\ \text{أو}\ y=-\sqrt{\frac{17}{4}}\\ \text{و}\\ x=\frac{-3}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-y^2-3x+2=0\\ \text{و}\\ y=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x^2-3x+2=0\\ \text{و}\\ y=0\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}(x=1)\ \text{أو}\ (x=2)\\ \text{و}\\ y=0\end{cases}$

إذن المعادلة المعطاة لها اربعة حلول هي $Z_1=\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}i$ ، $Z_2=\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}i$ ، $Z_3=i$ و $Z_4=2i$

4. طويلة عدد مركب

تعريف

إذا كانت M صورة العدد المركب Z فإن الطول OM اي $\|\overrightarrow{OM}\|$ يسمى طويلة العدد المركب Z والتي نرمز لها بـ $|Z|$.

إذا كان $Z=a+ib$ مع a و b عددان حقيقيان فإن طويلة العدد Z هو العدد الحقيقي الموجب أو المعدوم المعرف بـ $|Z|=OM=\sqrt{a^2+b^2}$ أو $|Z|=\sqrt{Z\overline{Z}}$.

مثال

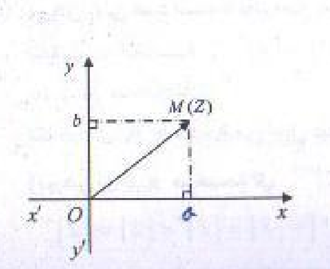
$|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$

$|3+2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

$|2|=\sqrt{2^2+0^2}=2$

$|-2|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$



خواص

1) من اجل كل نقطتين A و B لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب

لدينا $|Z_B - Z_A| = AB$ و $|\overline{Z_A}| = |Z_A|$ و $Z_A \times \overline{Z_A} = |Z_A|^2$

من اجل كل شعاع $\vec{u}$ لدينا $|Z_{\vec{u}}| = \|\vec{u}\|$

2) $Z=0$ يكافئ $|Z|=0$

3) $|Z+Z'| \le |Z| + |Z'|$

4) $|Z.Z'| = |Z|.|Z'|$

5) من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $|Z^n| = (|Z|)^n$.

6) من اجل $Z' \neq 0$ لدينا $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ و $\left|\frac{1}{Z'}\right| = \frac{1}{|Z'|}$

الإثبات

1) ليكن $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ و M لاحقتها $Z_B - Z_A$.

$AB = OM$ هذا معناه ان $AB = |Z_B - Z_A|$

- إذا كان $Z_A = a+ib$ فإن $\overline{Z_A} = a-ib$

$|\overline{Z_A}| = \sqrt{a^2+(-b^2)} = \sqrt{a^2+b^2} = |Z_A|$

2) $|Z|=0$ يكافئ $OM=O$ اي M منطبقة على O وعليه $Z=0$.

3) M و N نقطتان لاحقتاهما Z و $-Z'$

حسب المتباينة المثلثية لدينا $NM \le OM + ON$

لكن $ON = |Z'|$ و $OM = |Z|$ و $NM = |Z-(-Z')| = |Z+Z'|$

وعليه $|Z+Z'| \le |Z| + |Z'|$.

4) $|Z \times Z'|^2 = (Z \times Z') \times \overline{(Z \times Z')} = Z \times Z' \times \overline{Z} \times \overline{Z'}$

$= (Z \times \overline{Z})(Z' \times \overline{Z'}) = |Z|^2 \times |Z'|^2$

بما أن الطويلة عدد حقيقي موجب فإنه من المساواة $|Z \times Z'|^2 = |Z|^2 \times |Z'|^2$

نستنتج $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$.

5) نبرهن على هذه المساواة بالتراجع على n .

نسمي P_n الخاصية " $|Z^n| = |Z|^n$ "

P_0 و P_1 صحيحتان.

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n اي " $|Z^n| = |Z|^n$ "

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة اي $|Z^{n+1}| = |Z|^{n+1}$.

$|Z^{n+1}| = |Z^n \times Z| = |Z^n| \times |Z| = |Z|^n \times |Z| = |Z|^{n+1}$ ومنه P_{n+1} صحيحة

ومنه P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n .

6) إذا كان $ZZ'=1$ فإن $|Z| \times |Z'| = 1$

وهذا يعني $|Z'| = \frac{1}{|Z|}$ اي $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$

$$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \left|Z \times \frac{1}{Z'}\right| = |Z| \times \left|\frac{1}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$$

تمرين تدريبي 1

عين طويلة كل عدد مركب من الأعداد التالية :

$-5i$ ، $(2+5i)(7-8i)$ ، $(3+4i)^5$ ، $\frac{3}{(2-i)^3}$ ، $\frac{1+3i}{-1-3i}$

الحل

$$|-5i| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|(2+5i)(7-8i)| = |2+5i|\,|7-8i| = \sqrt{29} \times \sqrt{113}$$

$$|(3+4i)^5| = |3+4i|^5 = (\sqrt{9+16})^5 = 5^5 = 3125$$

$$\left|\frac{3}{(2-i)^3}\right| = \frac{|3|}{|(2-i)^3|} = \frac{3}{|2-i|^3} = \frac{3}{(\sqrt{5})^3} = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

$$\left|\frac{1+3i}{-1-3i}\right| = \frac{|1+3i|}{|-1-3i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$$

تمرين تدريبي 2

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $1-i$ و $3+i$.

عين هندسيا ثم جبريا :

أ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث $|Z-1+i| = 3$

ب) مجموعة نقط M ذات اللاحقة Z بحيث $|Z-1+i| = |Z-3-i|$

الحل

أ) - لدينا $|Z-1+i| = |Z-(+1-i)| = |Z-Z_A|$

لكن $|Z-Z_A| = AM$ إذن $AM = 3$

وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي دائرة مركزها A ونصف قطرها 3 .

- إذا كان $Z = x+iy$

فإن $|Z-1+i| = |x+iy-1+i| = |(x-1)+i(y+1)| = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$

لكن $|Z-1+i|=3$ ومنه $(x-1)^2+(y+1)^2=9$

إذن مجموعة النقط المطلوبة هي دائرة مركزها $A(1,-1)$ ونصف قطرها 3 .

ب) $AM=|Z-Z_A|=|Z-1+i|$

$|Z-3-i|=|Z-(3+i)|=|Z-Z_B|=BM$

بما أن $|Z-1+i|=|Z-3-i|$

فإن $AM=BM$

وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

$$|Z-1+i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

$$|Z-3+i|=|(x+iy)-3-i|=|(x-3)+i(y-1)|=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

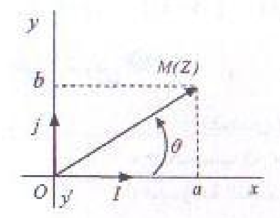
$|Z-1+i|=|Z-3-i|$ يكافئ $(x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y-1)^2$

ومنه ينتج $x+y-2=0$

إذن مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$ ومعادلته هي $x+y-2=0$

⑤ - عمدة عدد مركب غير معدوم – الشكل المثلثي

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$ ، M نقطة منه تختلف عن المبدأ O لاحقتها العدد المركب الغير معدوم Z .



5 . 1 تعريف

عمدة عدد مركب غير معدوم Z

هي أي قيس معبر عنه بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{OI},\vec{OM})$

ونرمز لها بـ $arg(Z)$

ملاحظة

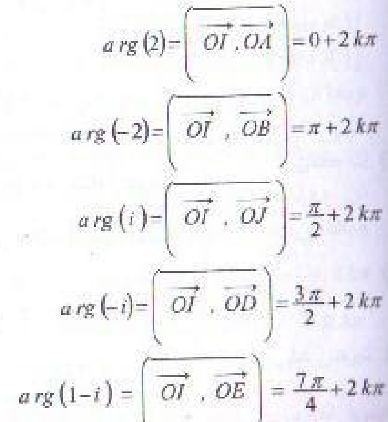
إذا كان θ قيس للزاوية $(\vec{OI},\vec{OM})$ فإن أي قيس آخر لهذه الزاوية يكون من الشكل $\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

مثال -

2 ، -2 ، i ، $-i$ ، $1-i$ أعداد مركبة عين عمدة كل منها.

الحل ✓

- لتكن A لاحقة العدد 2 ومنه $A(2,0)$ و B لاحقة العدد -2 و C لاحقة i و D لاحقة $-i$ و E لاحقة $1-i$



$$arg(2)=(\vec{OI},\vec{OA})=0+2k\pi$$

$$arg(-2)=(\vec{OI},\vec{OB})=\pi+2k\pi$$

$$arg(i)=(\vec{OI},\vec{OJ})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$arg(-i)=(\vec{OI},\vec{OD})=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

$$arg(1-i)=(\vec{OI},\vec{OE})=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$$

5 . 2 الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

النقطة M ذات اللاحقة العدد المركب الغير معدوم $Z=a+ib$ إحداثياتها القطبية هي $[r,\theta]$

حيث $r=|Z|=OM$ و θ عمدة Z أي $\theta=arg(Z)$

إذن $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta]$ وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب Z .

الانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي والعكس

ليكن Z عدد مركب غير معدوم بحيث $Z=a+ib$ مع a و b عددان حقيقيان غير معدومين معا.

$|Z|=r$ و $arg(Z)=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

- إذا عرفنا r و θ فإن $a=r\cos\theta$ و $b=r\sin\theta$
- إذا عرفنا a و b فإن $|Z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

و θ معرفة بـ $\begin{cases}\cos\theta=\frac{a}{r}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}\end{cases}$

ملاحظة

الكتابة $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ لا تمثل الشكل المثلثي في حالة $r<0$

مثال -

1) إذا كان $Z=1+i$ فإن $|Z|=\sqrt{2}$ و θ تحقق $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

أي $\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن $Z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) إذا كان $Z=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ فإن $Z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

خواص

1) كل عدد حقيقي موجب تماما عمدته تساوي 0

2) كل عدد حقيقي سالب تماما عمدته تساوي π

3) كل عدد مركب تخيلي صرف جزءه التخيلي موجب تماما عمدته $\frac{\pi}{2}$.

وكل عدد مركب تخيلي صرف جزءه التخيلي سالب تماما عمدته $-\frac{\pi}{2}$.

4) ليكن Z و Z' بحيث $Z=[r,\theta]$ و $Z'=[r',\theta']$

$Z=Z'$ يكافئ $(r=r')$ و $\theta'=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

5 . 3 العمدة والعمليات

1) $arg(-Z)=arg(Z)+\pi$ و $arg(\overline{Z})=-arg(Z)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

2) عمدة جداء عددين مركبين هي مجموع عمدتيهما أي :

$$arg(Z\times Z)=arg(Z)+arg(Z')+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

3) عمدة مقلوب عدد مركب غير معدوم هي نظير عمدة هذا العدد أي :

$$arg\left(\frac{1}{Z}\right)=-arg(Z)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

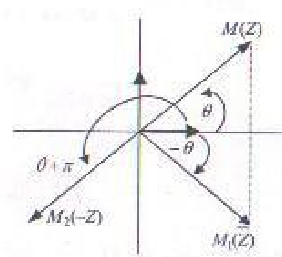
4) عمدة حاصل قسمة عددين مركبين غير معدومين هي الفرق بين عمدة البسط و عمدة المقام أي :

$$arg\left(\frac{Z}{Z}\right)=arg(Z)-arg(Z')+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

5) من اجل كل عدد صحيح n :

$$arg(Z^n)=n\,arg(Z)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

الإثبات



1) بما ان M_1 نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل فإن :

$$\left(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM_1}\right)=-\left(\overrightarrow{OI}\ ,\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

لكن $\left(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right)=arg(Z)$ و $\left(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM_1}\right)=arg(\overline{Z})$

إذن $arg(\overline{Z})=-arg(Z)+2k\pi$

- بما ان M_2 نظيرة M بالنسبة إلى المبدأ O

$$\left(\overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OM_2}\right)=\left(\overrightarrow{OI}\ ,\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM}\ ,\overrightarrow{OM_2}\right)+2k\pi$$

أي $arg(-Z)=arg(Z)+\pi+2k\pi$

2) $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $Z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ مع $r>0$ و $r'>0$

$$ZZ'=rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')\right]$$

$$ZZ'=rr'\left[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right]$$

وبما أن $r'r>0$ فإن $\theta+\theta'$ هي عمدة العدد ZZ'

إذن $arg(ZZ')=arg(Z)+arg(Z')+2k\pi$

3) إذا كان $ZZ'=1$ فإن $arg(ZZ')=0+2k\pi$

أي $arg(Z)+arg(Z')=0+2k\pi$

وبالتالي $arg(Z')=-arg(Z)+2k\pi$

4) $arg\left(\frac{Z}{Z'}\right)=arg\left(Z\times\frac{1}{Z'}\right)=arg(Z)+arg\left(\frac{1}{Z'}\right)+2k\pi$

$$=arg(Z)-arg(Z')+2k\pi$$

5) نبرهن على صحة المساواة بالتراجع على n $(n\geq 0)$ في حالة n سالب نضع $n=-n'$.

تمرن تدريبي

- عين الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي للعدد $Z=(1+i)(1-i\sqrt{3})$ ثم استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

الحل ✓

$$Z=(1+i)(1-i\sqrt{3})=1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})$$

$$|Z|=|1+i||1-i\sqrt{3}|=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$$

لدينا $arg(Z)=arg(1+i)+arg(1-i\sqrt{3})$

لتكن θ عمدة $1+i$ و θ' عمدة $1-i\sqrt{3}$

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\begin{cases}\cos\theta'=\frac{1}{2}\\ \sin\theta'=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta'=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$

وبالتالي $arg(Z)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi=-\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

لان $Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$

بالمطابقة بين الشكل الجبري والمثلثي نجد $\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=1+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}\end{cases}$

ومنه $\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

وبما أن $\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}$

فإن $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

5 . 4 العمدة و الهندسة

خواص

1) من أجل كل نقطتين مختلفتين A و B لدينا ، $arg(Z_B-Z_A)=(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})+2k\pi$

2) من أجل كل النقط A ، B ، C ، D بحيث $A\neq B$ و $C\neq D$

لدينا $k\in\mathbb{Z}$ ، $arg\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_D-Z_C}\right)=(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})+2k\pi$

3) إذا كان $\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_C}=k$ مع $k\in\mathbb{R}$ فإن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CB}$

الإثبات

$$arg\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_D-Z_C}\right)=arg(Z_B-Z_A)-arg(Z_D-Z_C)+2k\pi \ ، \ k\in\mathbb{Z}$$

$$=(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD})+2k\pi$$

$$=-(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI})-(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD})+2k\pi$$

$$=-\left[(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI})+(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD})\right]+2k\pi$$

$$=-(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})+2k\pi$$

$$=(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})+2k\pi$$

تمرن تدريبي

نعطي في المستوي المركب النقط A ، B ، C لواحقها على التوالي ،
$1+i$ ، $3+i$ ، $2+i(\sqrt{3}+1)$
- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

✓ الحل

لإثبات أن المثلث متقايس الأضلاع يكفي أن نثبت أنه متقايس الساقين وأن إحدى زواياه الموجهة قيسها $\frac{\pi}{3}$ أو $\frac{-\pi}{3}$

لنبين أن $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ طويلته 1 وعمدته $\frac{\pi}{3}$ أو $\frac{-\pi}{3}$.

$$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\frac{2+i(\sqrt{3}+1)-1-i}{3+i-1-i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$$

ومنه $|Z_C-Z_A|=|Z_B-Z_A|$ اي $AC=AB$

$$arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)=arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

اي $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

5 . 5 دستور موافر

من أجل كل عدد حقيقي θ ومن أجل كل عدد صحيح n :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

مثال ـ

عين الشكل الجبري للعدد المركب $Z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50}$

✓ الحل

نضع $Z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ عندئذ $|Z|=1$ و $arg(Z)=\frac{\pi}{3}$

إذن $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ومنه $Z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{50}=\cos 50\frac{\pi}{3}+\sin 50\frac{\pi}{3}$

$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

تمرين تدريبي

A ، B ، C ، D نقط لواحقها $3-2i$ ، $-3-2i$ ، $5+2i$ ، $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$

قارن بين $\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_D}$ و $\frac{Z_A-Z_D}{Z_B-Z_D}$.

ماذا يمكننا القول حول الزاويتين $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right)$ ؟

✓ الحل

$$\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_D}=\frac{5+2i-\frac{3}{2}+\frac{-5}{2}i}{3-2i-\frac{3}{5}-\frac{5}{2}i}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}=\frac{7-i}{3-9i}$$

$$=\frac{(7-i)(3+9i)}{90}=\frac{30+60i}{90}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

$$\frac{Z_A-Z_D}{Z_B-Z_D}=\frac{3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{-3-2i-\frac{3}{5}-\frac{5}{2}i}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i}=\frac{3-9i}{-9-9i}$$

$$=\frac{1-3i}{-3-3i}\times\frac{-3+3i}{-3+3i}=\frac{6+12i}{18}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

. بما أن العددين $\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_D}$ و $\frac{Z_A-Z_D}{Z_B-Z_D}$ متساويان

و $arg\left(\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_D}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$ و $arg\left(\frac{Z_A-Z_D}{Z_B-Z_D}\right)=\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right)$

فإن $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$

6 . الكتابة الأسية لعدد مركب - ترميز أولر

6 . 1 الكتابة الأسية

كل عدد مركب طويلته 1 نستطيع كتابته على الشكل $Z=\cos\theta+i\sin\theta$

لتكن U مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها 1 و f الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي θ

العدد المركب $f(\theta)$ من U حيث $f(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$

لنبين أنه من أجل كل عددين حقيقيين θ و θ' لدينا :

$f(\theta+\theta')=f(\theta)\times f(\theta')$

لدينا $f(\theta+\theta')=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')$

$f(\theta)\times f(\theta')=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')$

ومنه نستنتج أن $f(\theta+\theta')=f(\theta)f(\theta')$.

بما أن الدالة الأسية ذات الأساس (هـ) تحول المجاميع إلى جداءات والدالة f تحقق هذه الخاصية هذا ما يقودنا إلى الترميز التالي $f(\theta)=e^{i\theta}$ أي $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

تعريف ❶

العدد المركب الذي طويلته 1 وعمدته θ نرمز له بـ $e^{i\theta}$ ونكتب $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

مثال .♦

$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=1$

$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

$e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$

تعريف ❷

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم Z عمدته θ هو $Z=|Z|e^{i\theta}$

مثال .♦

- إذا كان $Z=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$ فإن الكتابة الأسية له هي $Z=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

- الكتابة الأسية للعدد $Z=\left[\frac{1}{3},3\frac{\pi}{2}\right]$ هي $Z=\frac{1}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$

ملاحظة

بما أن $|\overline{Z}|=|Z|$ و $arg(\overline{Z})=-arg(Z)$

فإننا نستنتج من $Z=|Z|e^{i\theta}$ أن $\overline{Z}=|Z|e^{-i\theta}$

6 . 2 قواعد الحساب باستعمال الشكل الأسي

Z و Z' عددان مركبان حيث $Z=[r,\theta]$ و $Z'=[r',\theta']$ و $r>0$ و $r'>0$:

1) $(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'})=rr'e^{i(\theta+\theta')}$

2) $\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

3) $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

4) $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

5) $(re^{i\theta} = r'e^{i\theta'})$ يكافئ $(r=r'$ و $\theta=\theta'+2k\pi)$

مثال .

ليكن Z و Z' عددان مركبان حيث $Z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $Z'=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$ZZ'=(2\times 3)e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}e^{i\left(7\frac{\pi}{12}\right)}$$

دستوري موافر و أولر

- من أجل كل عدد حقيقي θ ومن أجل كل عدد صحيح n لدينا $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- بما أن $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ فإننا نستنتج :

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) \quad \text{و} \quad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$$

تمرين تدريبي

اعط الشكل الأسي للأعداد المركبة الآتية $\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}$ ، $\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$ ، $(1-i)^{14}$

✓ الحل

$$\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i4\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{5\pi}{3}}$$

بما أن $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ فإن $(1-i)^{14} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{14} = 2^7\times e^{\frac{-7}{2}\pi i} = 128e^{\frac{-3}{2}\pi i}$

لأن $\frac{-7}{2}\pi = -2\pi - \frac{-3}{2}\pi$

6 . 3 الكتابة الخطية لـ $\sin^n x$ و $\cos^n x$

- نعني بالكتابة الخطية التعبير عن $\cos^n x$ أو $\sin^n x$ أو بصفة عامة عن مجموع حدود من الشكل $a\cos^n x\sin^p x$ بواسطة مجموع حدود من الشكل $b\cos qx$ أو $c\sin qx$
مع c ، b ، a أعداد حقيقية و q ، p ، n أعداد طبيعية.
- فائدة هذه الكتابة تظهر جليا في تعيين الدوال الأصلية وحساب التكاملات.
- ليكن Z عدد مركب طويلته 1 وعمدته x .
إذن $Z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$ و $\overline{Z}=e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

ومنه نستنتج $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ و $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

و $\cos^n x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ و $\sin x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$

$e^{inx}+e^{-inx}=2\cos(nx)$ .... (1)

$e^{inx}-e^{-inx}=2i\sin(nx)$ .... (2)

لنشر $\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ أو $\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$ نستعمل دستور ثنائي الحد والمساوتين (1) و (2)

مثال .

أوجد العبارة الخطية لكل من $\cos^5 x$ و $\sin^5 x$

✓ الحل

1) لدينا $\cos^5 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$

$$\cos^5 x=\frac{1}{2^5}\left[e^{i5x}+5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}+10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}+e^{-5ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^5}\left[\left(e^{5ix}+e^{-5ix}\right)+10\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)+5\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^5}\left[2\cos 5x+20\cos x+10\cos 3x\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x)\right]$$

2) لدينا $\sin^5 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)$

$$\sin^5 x=\frac{1}{i^5 2^5}=\left[e^{5ix}-5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}-10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}-e^{-5ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^5 i}\left[\left(e^{5ix}-e^{-5ix}\right)-5\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^5 i}\left[2i\sin(5x)-10i\sin(3x)+20i\sin(x)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\right]$$

تمرين تدريبي 1

ليكن $Z=5e^{i\frac{\pi}{4}}$ بين أن Z^{52} حقيقي ثم عين إشارته.

✓ الحل

$$Z^{52}=\left(5e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{52}=5^{52}\times e^{i\frac{52\pi}{4}}$$

ومنه $arg(Z^{52}) = \frac{52\pi}{4}$ ولكن $52\frac{\pi}{4} = 13\pi = \pi + 6(2\pi)$

إذن $arg(Z^{52}) = \pi$ ومنه نستنتج أن $Z^{52} = 5^{52} e^{i\pi} = -5^{52}$

ومنه فإن إشارة Z^{52} سالبة.

تمرين تدريبي 2

θ عدد حقيقي من المجال $]0 , \frac{\pi}{2}[$ اعط الكتابة الأسية للعدد المركب $Z = 1 + e^{i\theta}$

الحل ✓

لدينا $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ومنه $Z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

لكن $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ و $\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

إذن $Z = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

بما أن $\theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$ فإن $\cos\frac{\theta}{2} > 0$

إذن $Z = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

7. معادلات من الدرجة الثانية ذات المجهول Z بمعادلات حقيقية

مبرهنة

لتكن المعادلة $aZ^2 + bZ + c = 0$ ذات المجهول المركب Z و a ، b ، c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

مميز هذه المعادلة هو العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة لها حلان حقيقيان مختلفان هما $Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة لها حل مضاعف $Z_0 = \frac{-b}{2a}$
- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة لها حلان مركبان مترافقان $Z' = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $Z'' = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

الإثبات

المعادلة من الدرجة الثانية لها حلان في المجموعة $\mathbb{C}$ مهما كانت المعاملات الحقيقية a ، b ، c و $a \neq 0$.

نضع $f(Z) = aZ^2 + bZ + c$ مع $a \neq 0$.

الشكل النموذجي لـ $f(Z)$ هو $f(Z) = a\left[\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta > 0$ نضع $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$

وبالتالي $f(Z) = a\left[\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(Z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(Z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$f(Z) = 0$ يكافئ $\left(Z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ أو $\left(Z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن $f(Z) = a\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2$

$f(Z) = 0$ يكافئ $Z = \frac{-b}{2a}$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن $-\Delta > 0$ وبالتالي نستطيع وضع $-\Delta = (\sqrt{-\Delta})^2$

وبالتالي $f(Z) = a\left[\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$= a\left[Z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]\left[Z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]$

$f(Z) = 0$ يكافئ $\left(Z = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$ أو $\left(Z = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$

مثال -

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين :

أ) $Z^2 + Z + 1 = 0$

ب) $Z^2 + 3Z + 2 = 0$

الحل ✓

أ) $\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3$

$\Delta < 0$ ومنه المعادلة (أ) لها حلان مركبان هما $Z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $Z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

ب) $\Delta = 9 - 4(1)(2) = 1$ ومنه المعادلة لها حلان حقيقيان مختلفان هما :

$Z_1 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ ، $Z_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$

خاصية

ليكن $f(Z) = aZ^2 + bZ + c$ حيث a و b ، c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$

و $\Delta = b^2 - 4ac$.

- إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $aZ^2 + bZ + c = a(Z - Z_1)(Z - Z_2)$ حيث Z_1 ، Z_2 جذرين مختلفين لـ $f(Z)$.
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن $f(Z) = a(Z - Z_0)^2$ حيث Z_0 الجذر المضاعف لـ $f(Z)$.

8 . الجذرين التربيعيين لعدد مركب غير معدوم

8 . 1 تعريف

ليكن $z=a+ib$ عدد مركب غير معدوم

الجذر التربيعي للعدد المركب z هو العدد المركب Z الذي يحقق $Z^2=z$.

8 . 2 إيجاد الجذرين التربيعيين

تعيين الجذرين التربيعيين يؤول إلى حل المعادلة ذات المجهول Z التالية $Z^2=z$.

$Z=x+iy$ ومنه $Z^2=(x^2-y^2)+i2xy$.

$Z^2=z$. يكافئ $\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$

بما أن $|z|=|Z^2|$ فإن $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$

إذن من المساواة $Z^2=z$ نستنتج $\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\\x^2-y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$ .... (I)

بعد حل الجملة (I) ذات المجهولين x و y نكون قد عينا الجذرين التربيعيين لـ z .

مثال -

عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=3-4i$

✓ الحل

ليكن $Z=x+iy$ جذر تربيعي لـ z ومنه $\begin{cases}x^2-y^2=3 \ \dots (1)\\2xy=-4 \ \dots (2)\\x^2+y^2=5 \ \dots (3)\end{cases}$ .... (I)

بجمع (1) و (3) طرف لطرف نجد $2x^2=8$ ومنه $x^2=4$

$x^2=4$ يكافئ $(x=2)$ و $(x=-2)$.

- إذا كان $x=2$ فإن $y=\frac{-4}{2x}=-1$
- إذا كان $x=-2$ فإن $y=\frac{-4}{2x}=1$

إذن الجذرين التربيعيين للعدد المركب z هما $Z_1=2-i$ و $Z_2=-2+i$.

8 . 3 حل معادلات من الدرجة الثانية بمعاملات مركبة

$f(Z)=aZ^2+bZ+c$ مع a و b ، c أعداد مركبة و $a\neq0$.

بما أن القواعد في $\mathbb{C}$ هي نفسها في $\mathbb{R}$ فإن مميز $f(Z)$ هو $\Delta=b^2-4ac$.

الشكل النموذجي لـ $f(Z)$ هو $f(Z)=a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

ليكن δ الجذر التربيعي لـ Δ ومنه $\Delta=\delta^2$

وبالتالي $f(Z)=a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\delta^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(Z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(Z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\right]$

إذن المعادلة $f(Z)=0$ لها حلان هما $Z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ و $Z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$

مثال -

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين :

أ) $iZ^2-iZ-3-i=0$

ب) $Z^2+(3-2i)Z+5-5i=0$

✓ الحل

أ) $\Delta=(-i)^2-4(i)(-3-i)=-5+12i$

نبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ

ليكن $\delta=a+ib$ جذر تربيعي لـ Δ ومنه $\delta^2=\Delta$

وعليه نستنتج $\begin{cases}a^2-b^2=-5 \ \dots\dots(1)\\2ab=12 \ \dots\dots (2)\\a^2+b^2=13 \ \dots\dots(3)\end{cases}$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد $a^2=4$ ومنه $(a=2)$ أو $(a=-2)$

لما $a=2$ نجد $b=3$ ولما $a=-2$ نجد $b=-3$

ومنه فإن الجذرين التربيعيين لـ Δ هما $\delta=2+3i$ و $\delta'=-2-3i$

ليكن Z_1 ، Z_2 حلان للمعادلة (أ) :

إذن $Z_1=\frac{i+2+3i}{2i}=\frac{2+4i}{2i}=\frac{-2i+4}{2}=2-i$

$Z_2=\frac{i-2-3i}{2i}=\frac{-2-2i}{2i}=\frac{2i-2}{2}=-1+i$

ب) $\Delta=(3-2i)^2-4(1)(5-5i)=9-12i-4-20+20i=-15+8i$

ليكن δ جذر تربيعي لـ Δ بحيث $\delta=a+ib$

المساواة $\delta^2=\Delta$ تعني $\begin{cases}a^2-b^2=-15 \ \dots (1)\\2ab=8 \ \dots\dots\dots (2)\\a^2+b^2=17 \ \dots\dots (3)\end{cases}$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد $2a^2=2$ ومنه $a^2=1$ أي $a=1$ أو $a=-1$

لما $a=1$ نجد $b=4$ ولما $a=-1$ نجد $b=-4$

ومنه فإن الجذرين التربيعيين لـ Δ هما $1+4i$ و $-1-4i$

ليكن Z_1 و Z_2 حلان للمعادلة (ب) :

$$Z_1=\frac{-3+2i+1+4i}{2}=-1+3i \quad \text{و} \quad Z_2=\frac{-3+2i-1-4i}{2}=-2-i$$

9. المعادلات من الشكل $p(Z)=0$ حيث p كثير حدود معاملاته حقيقية

تعريف

القول ان p كثير حدود مركب بمعاملات حقيقية يعني ان p هو عبارة عن دالة من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ من الشكل $Z \mapsto a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0$ مع a_0 ، $a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقية.

لما $a_n \neq 0$ نقول أن p من الدرجة n.

مبرهنة

- إذا كان Z_0 جذرا لكثير الحدود p من الدرجة n اي $(p(Z_0)=0)$ فإنه يوجد كثير حدود q من الدرجة $n-1$ بمعاملات حقيقية بحيث من أجل كل عدد مركب Z يكون $p(Z)=(Z-Z_0)q(Z)$

- كل كثير حدود من الدرجة n له n جذرا في $\mathbb{C}$ مختلفة او متساوية

وهذه النتائج تبقى صحيحة حتى ولو كانت المعاملات ليست حقيقية.

مثال .

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود p المعرف كما يلي $p(Z)=2Z^3-3Z^2+2Z-1$

1) احسب $p(1)$ ثم بين انه يوجد $q(Z)$ بحيث من اجل كل Z من $\mathbb{C}$ $p(Z)=(Z-1)q(Z)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(Z)=0$

3) نسمي Z_1 ، Z_2 الحلين الآخرين للمعادلة $p(Z)=0$ ولتكن النقط A ، B ، C لواحقها 1 ، Z_1 ، Z_2 على الترتيب. احسب $\left|\frac{Z_1-Z_0}{Z_2-Z_0}\right|$ ماذا تستنتج ؟

الحل

1) $p(1)=2-3+2-1=0$ ومنه نستنتج ان 1 جذر لـ $p(Z)$

بما ان $p(Z)$ من الدرجة الثالثة فإن $q(Z)$ من الدرجة الثانية وعليه من أجل كل Z من $\mathbb{C}$:

$$p(Z)=(Z-1)(aZ^2+bZ+c)=aZ^3+(b-a)Z^2+(c-b)Z-c$$

بالمطابقة مع عبارة $p(Z)$ نجد :

$$\begin{cases} a=2 \\ b-a=-3 \\ c-b=2 \\ -c=-1 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

إذن $p(Z)=(Z-1)(2Z^2-Z+1)$

2) $p(Z)=0$ يكافئ $\begin{cases} Z-1=0 \\ \text{أو} \\ 2Z^2-Z+1=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} Z=1 \\ 2Z^2-Z+1=0 \end{cases}$

نحل المعادلة $2Z^2-Z+1=0$ .... (*)

$\Delta=1-4(2)(1)=-7$ ومنه فإن المعادلة (*) لها حلان هما $Z_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$ ، $Z_2=\frac{1-i\sqrt{7}}{4}$

إذن المعادلة $p(Z)=0$ لها ثلاثة حلول هي 1 ، Z_1 ، Z_2.

3) $$\left|\frac{Z_1-Z_0}{Z_2-Z_0}\right|=\left|\frac{-3+i\sqrt{7}}{-3-i\sqrt{7}}\right|=\frac{\sqrt{9+7}}{\sqrt{9+7}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16}}=1$$

ولدينا من جهة أخرى $\left|\frac{Z_1-Z_0}{Z_2-Z_0}\right|=\frac{AB}{AC}$

إذن $\frac{AB}{AC}=1$ وهذا يعني أن ABC مثلث متقايس الساقين رأسه الأساسي هو A .

الحلول المرافقة

مبرهنة

p كثير حدود مركب بمعاملات حقيقية.

إذا قبلت المعادلة $p(z)=0$ حلا مركبا z_0 فإن مرافقه $\overline{z_0}$ هو أيضا حلا لهذه المعادلة وعندئذ نكتب $p(z)=(z-z_0)(z-\overline{z_0})q(z)$

الإثبات

نعتبر كثير الحدود $p(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots + a_1 z + a_0$

و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية مع $a_n \neq 0$

نفرض أن z_0 حلا للمعادلة $p(z)=0$ ونبين أن $\overline{z_0}$ حلا ايضا للمعادلة $p(z)=0$.

$p(z)=0$ يعني $p(\overline{z_0})=0$ وهذا يعني أن $\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots + a_1 z_1 + a_0}=0$

وحسب خواص مرافق مجموع أعداد مركبة نستنتج $a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$

وهذا يعني أن $\overline{z_0}$ حل للمعادلة $p(z)=0$

مثال .

$p(z)$ كثير حدود مركب حيث $p(z)=z^3-z^2+z-1$

بين أن $z_0=i$ حل للمعادلة $p(z)=0$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$

الحل

$p(z_0)=i^3-i^2+i-1=-i+1+i-1=0$

ومنه فإن i حل للمعادلة $p(z)=0$

وحسب المبرهنة السابقة فإن $-i$ حل أيضا لـ $p(z)=0$

وعليه من أجل كل z من $\mathbb{C}$

يكون $p(z)=(z-i)(z+i)q(z)$

بما أن $q(z)$ من الدرجة الأولى فإنه يكتب على الشكل $az+b$

وعليه $p(z)=(z-i)(z+i)(az+b)$

بعد النشر و المطابقة نجد $a=1$ ، $b=-1$

إذن $p(z)=(z-i)(z+i)(z-1)$

$p(z)=0$ يكافئ $(z=i)$ أو $(z=-i)$ أو $(z=1)$

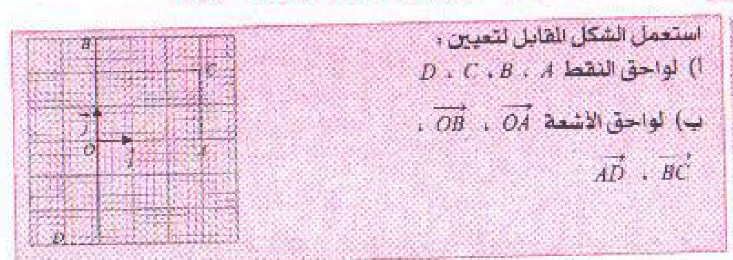


تطبيق 1 تعيين لواحق نقط وأشعة

استعمل الشكل المقابل لتعيين :

أ) لواحق النقط A ، B ، C ، D

ب) لواحق الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AD}$



✓ الحل

أ) $z_A=3$ ، $z_B=3i$ ، $z_C=3+2i$ ، $z_D=-1-3i$

ب) $z_{\overrightarrow{OA}}=z_A=3$ ، $z_{\overrightarrow{OB}}=z_B=3i$ ، $z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=3-i$ ، $z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=-3-3i$

تطبيق 2 تطبيق خاصية تساوي عددين مركبين

عين العددين الحقيقيين x و y بحيث :

أ) $2x-y+i(x+3y)=1-2i$ .... (1)

ب) $3x+2iy+i(x-iy)=i$ .... (2)

✓ الحل

أ) من المساواة (1) نستنتج $\begin{cases}2x-y=1\\x+3y=-2\end{cases}$ .... (I)

بعد حل الجملة (I) نجد $\begin{cases}x=\frac{1}{7}\\y=\frac{-5}{7}\end{cases}$

ب) بعد تبسيط المساواة (2) نجد $(3x+y)+i(x+2y)=i$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}3x+y=0\\x+2y=1\end{cases}$ .... (II)

بعد حل الجملة (II) نجد $\begin{cases} x=\frac{-1}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}$

تطبيق 3 تعيين مجموعة النقط

من اجل كل عدد مركب z حيث $z=x+iy$ نضع $f(z)=z^2-z+1$ مع x و y عددين حقيقيين

ا) اكتب $f(z)$ على الشكل الجبري

ب) ماهي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $f(z)$ حقيقي ؟

✓ الحل

ا) $f(z)=(x+iy)^2-(x+iy)+1=x^2-y^2+2ixy-x-iy+1$

$=(x^2-y^2-x+1)+i(2xy-y)$

ب) $f(z)$ حقيقي يعني ان $2xy-y=0$ اي $\begin{cases} y=0 \\ \text{او} \\ 2x-1=0 \end{cases}$

ومنه مجموعة النقط M بحيث $f(z)$ حقيقي هي إتحاد مستقيمين (d_1) و (d_2) معادلتيهما $(d_1): y=0$ و $(d_2): 2x-1=0$

تطبيق 4 تعيين الجزء الحقيقي والتخيلي لعدد مركب

ا) عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i}$

ب) استنتج الجزء الحقيقي و التخيلي للعددين $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ و $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{17}$

✓ الحل

ا) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{1^2+1^2}=\frac{1-2i-1}{2}=-i$

ب) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}=(-i)^{10}=i^{10}=i^8\times i^2=-1$ لأن $i^4=1$ و $i^2=-1$

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{17}=(-i)^{17}=-i^{17}=-i^{16}\times i=-i$

تطبيق 5 حل معادلات في المجموعة $\mathbb{C}$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

ا) $(z-2)(iz-1)=0$ ، ب) $iz+2-i=0$ ، ج) $z^2+9=0$

د) $\frac{1}{z+i}=3+i$ ، هـ) $\frac{z+3i}{z-3}=i$ ، و) $z^2-9=0$

✓ الحل

ا) $(z-2)(iz-1)=0$ تكافئ $z-2=0$ او $iz-1=0$

اي $z=2$ او $z=\frac{1}{i}=-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (ا) هي $S=\{2,-i\}$

ب) المعادلة $iz+2-i=0$ تكافئ $iz=i-2$

ومنه نستنتج $z=\frac{-2+i}{i}=1+2i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{1+2i\}$

ج) $z^2+9=0$ يكافئ $z^2=-9=(3i)^2$

ومنه المعادلة $z^2+9=0$ لها حلان هما $z_1=3i$ و $z_2=-3i$

فتكون مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{3i,-3i\}$

د) المعادلة $\frac{1}{z+i}=3+i$ تكافئ $z+i=\frac{1}{3+i}$ اي $z=\frac{1}{3+i}-i$

ومنه $z=\frac{3-i}{(3+i)(3-i)}-i=\frac{3-i}{3^2+(-1)^2}-i=\frac{3}{10}-\frac{13}{10}i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{3}{10}-\frac{13}{10}i\right\}$

هـ) المعادلة $\frac{z+3i}{z-3}=i$ تكافئ $(1-i)z=-6i$ يكافئ $z=\frac{-6i}{1-i}$

بما ان $\frac{-6i}{1-i}=\frac{-6i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-6i+6}{2}=3-3i$ فإن $z=3-3i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{3-3i\}$

و) $z^2-9=0$ تعني $z^2=3^2$ ومنه $z=3$ او $z=-3$

ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{3,-3\}$.

تطبيق 6 حل جملة معادلتين

حل الجملتين التاليتين $\begin{cases} 2z+z'=1 \\ z-iz'=i \end{cases}$ ، $\begin{cases} z-3z'=1+i \\ 2z+iz'=1 \end{cases}$

الحل

أ) $\begin{cases} 2z + z' = 1 \ ... \ (1) \\ z - i z' = i \ ... \ (2) \end{cases}$

من المساواة (2) نجد $z = i z' + i$

نعوض z في (1) نجد $2(iz'+i)+z' = 1$

وبالتبسيط نجد $(2i+1)z' = 1-2i$

ومنه $z' = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)^2}{5} = \frac{1-4-4i}{5} = \frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i$

وعليه نجد $z = i\left(\frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i\right) + i = \frac{-3}{5}i + \frac{4}{5} + i = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

ب) $\begin{cases} z - 3z' = 1+i \ ... \ (1) \\ 2z + i z' = 1 \ ... \ (2) \end{cases}$

من المساواة (2) نجد $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i z'$

نعوض z في (1) نجد $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i z' - 3z' = 1+i$

وبالتبسيط نجد $\left(-\frac{1}{2}i - 3\right)z' = \frac{1}{2} + i$ ومنه $z' = \frac{\frac{1}{2}+i}{-\frac{1}{2}i - 3}$

لكن $\frac{\frac{1}{2}+i}{-3-\frac{1}{2}i} = -\frac{8}{37} - \frac{11}{37}i$ ومنه $z' = -\frac{8}{37} - \frac{11}{37}i$

إذن $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i z' = \frac{13}{37} + \frac{4}{37}i$

تطبيق 7 تعيين مجموعة النقط

ليكن z عددا مركبا حيث $z = x + iy$ وليكن Z عددا مركبا حيث $Z = \frac{z}{1+i}$

أ) اكتب Z على الشكل الجبري.

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث Z حقيقي.

جـ) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z تخيلي صرف.

الحل

أ) $Z = \frac{x+iy}{1+i} = \frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{x - ix + iy + y}{2} = \frac{x+y}{2} - i\frac{(x-y)}{2}$

ب) Z حقيقي يعني ان $\frac{x-y}{2} = 0$ اي $y = x$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $y = x$

جـ) Z تخيلي صرف هذا معناه $\frac{x+y}{2} = 0$ اي $y = -x$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $y = -x$

تطبيق 8 المتتالية الدورية والمتتالية الهندسية

1) اكتب على ابسط شكل ممكن الأعداد i^6 ، i^5 ، i^4 ، i^2

2) بين أن متتالية الأعداد المركبة (z_n) المعرفة بـ $z_n = i^n$ دورية يطلب إيجاد دورها.

3) نضع $S_n = 1 + i + i^2 + ... + i^n$

أ) احسب S_1 و S_2 ، S_3 ، S_4 ، S_5.

ب) تحقق ان $S_n - i S_n = 1 - i^{n+1}$

جـ) بسط S_n في كل حالة من الحالات التالية :

$n = 4p$ ، $n = 4p+1$ ، $n = 4p+2$ ، $n = 4p+3$ مع $p \in \mathbb{N}$.

الحل

1) $i^2 = -1$ ، $i^4 = (i^2)^2 = 1$ ، $i^5 = i^4 i = i$ ، $i^6 = i^4 i^2 = -1$

2) (z_n) دورية دورها T هذا معناه أنه من أجل n من $\mathbb{N}$ لدينا $z_{n+T} = z_n$

$z_{n+T} = z_n$ يكافئ $i^{n+T} = i^n$ اي $i^T = 1$

ومن السؤال الأول نجد $T = 4$ لأن الدور هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم.

3) الأعداد 1 ، i ، i^2 ، ... ، i^n حدود لمتتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها i

ومنه $S_n = \frac{1-i^{n+1}}{1-i} = \frac{(1-i^{n+1})(1+i)}{2}$

أ) $S_1 = \frac{(1-i^2)(1+i)}{2} = 1+i$

$S_2 = \frac{(1-i^3)(1+i)}{2} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1-1+2i}{2} = i$

$S_3 = \frac{(1-i^4)(1+i)}{2} = 0$

$S_4 = \frac{(1-i^5)(1+i)}{2} = \frac{(1-i)(1+i)}{2} = 1$

$S_5 = \frac{(1-i^6)(1+i)}{2} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$

ب) $S_n - i S_n = \frac{(1-i^{n+1})(1+i)}{2} - \frac{i(1-i^{n+1})(1+i)}{2}$

$= \frac{(1-i^{n+1})[1+i-i+1]}{2} = \frac{(1-i^{n+1})(2)}{2} = 1 - i^{n+1}$

جـ) في حالة $n=4p$ لدينا :

$$S_n=\frac{\left(1-i^{4p+1}\right)(1+i)}{2}=\frac{\left(1-\left(i^4\right)^p i\right)(1+i)}{2}$$
$$=\frac{\left(1-1^p i\right)(1+i)}{2}=\frac{(1-i)(1+i)}{2}=1$$

• في حالة $n=4p+1$ لدينا :

$$S_n=\frac{\left(1-i^{4p+2}\right)(1+i)}{2}=\frac{\left(1-i^2\right)(1+i)}{2}=1+i$$

• في حالة $n=4p+2$ لدينا :

$$S_n=\frac{\left(1-i^{4p+3}\right)(1+i)}{2}=\frac{\left(1-i^3\right)(1+i)}{2}=\frac{(1+i)^2}{2}=1$$

• في حالة $n=4p+3$ لدينا $S_n=\frac{\left(1-\left(i^4\right)^{p+1}\right)(1+i)}{2}=0$

تطبيق 9 تعيين مرافق عدد مركب

اكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافقات الأعداد المركبة Z التالية :

أ) $Z=z^2+3iz-1$ ، ب) $Z=(z-i)(z+3)$

جـ) $Z=\frac{3z^2-3iz+3}{-iz+2i}$ ، د) $Z=(3-2iz)^2$

✓ الحل

أ) $\overline{Z}=\overline{\left(z^2+3iz-1\right)}=\overline{z^2}+\overline{3iz}-1=\bar{z}^2+\overline{3i}\times\bar{z}-1=\bar{z}^2-3i\bar{z}-1$

ب) $\overline{Z}=\overline{(z-i)(z+3)}=\overline{(z-i)}\times\overline{(z+3)}=\left(\bar{z}-\bar{i}\right)\left(\bar{z}+\bar{3}\right)=\left(\bar{z}+i\right)\left(\bar{z}+3\right)$

جـ) $\overline{Z}=\overline{\left(\frac{3z^2-3iz+3}{-iz+2i}\right)}=\frac{\overline{\left(3z^2-3iz+3\right)}}{\overline{(-iz+2i)}}=\frac{3\bar{z}^2+3i\bar{z}+3}{i\bar{z}-2i}$

د) $\overline{Z}=\overline{(3-2iz)^2}=\left(\overline{3-2iz}\right)^2=\left(3+2i\bar{z}\right)^2$

تطبيق 10 تصنيف الأعداد المركبة

بين بدون حساب أن كل من الأعداد المركبة التالية حقيقية أو تخيلية صرفة:

أ) $Z=z^2-\bar{z}^2$ ، ب) $Z=\frac{z^3+\bar{z}^3}{z+\bar{z}}$ ، جـ) $Z=\frac{z^2+\bar{z}^2}{z\bar{z}+1}$

✓ الحل

أ) $z^2-\bar{z}^2=(z-\bar{z})(z+\bar{z})$

بما أن $z+\bar{z}$ حقيقي و $z-\bar{z}$ تخيلي صرف فإن $z^2-\bar{z}^2$ تخيلي صرف

وبالتالي Z تخيلي صرف

ب) $\overline{\left(\frac{z^3+\bar{z}^3}{z+\bar{z}}\right)}=\frac{\overline{\left(z^3+\bar{z}^3\right)}}{\overline{(z+\bar{z})}}=\frac{\bar{z}^3+z^3}{\bar{z}+z}$

بما أن $\overline{Z}=Z$ فإن Z حقيقي

جـ) $\overline{Z}=\frac{\bar{z}^2+z^2}{\bar{z}z+1}=Z$ ومنه Z حقيقي.

تطبيق 11 تصنيف الأعداد المركبة

نضع $z_1=\frac{2i+1}{i+2}$ و $z_2=\frac{1-2i}{2-i}$

1) بين بدون حساب أن z_1+z_2 حقيقي و z_1-z_2 تخيلي صرف.

2) أوجد النتائج السابقة بالحساب.

✓ الحل

1) z_1+z_2 حقيقي هذا معناه أن $\overline{z_1+z_2}=z_1+z_2$

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}=\frac{1-2i}{2-i}+\frac{1+2i}{2+i}=z_1+z_2$$

ومنه z_1+z_2 حقيقي.

z_1-z_2 تخيلي صرف هذا معناه $\overline{z_1-z_2}+z_1-z_2=0$

$$\overline{z_1-z_2}+z_1-z_2=\overline{z_1}-\overline{z_2}+z_1-z_2=z_2-z_1+z_1-z_2=0$$

ومنه z_1-z_2 تخيلي صرف.

2) $$z_1+z_2=\frac{1+2i}{2+i}+\frac{1-2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2-i)+(2+i)(1-2i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{2-i+4i+2+2-4i+i+2}{5}=\frac{8}{5}$$

$$z_1-z_2=\frac{1+2i}{2+i}-\frac{1-2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2-i)-(1-2i)(2+i)}{8}$$
$$=\frac{2-i+4i+2-2-i+4i-2}{8}=\frac{6i}{8}=\frac{3}{4}i$$

تطبيق 12 — حل المعادلات في $\mathbb{C}$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ) $i\bar{z}=2+i$ ؛ ب) $(\bar{z}+1-3i)(z+2i)(iz-2)=0$

جـ) $z+2\bar{z}=(1-i)^2$ ؛ د) $z^2-\bar{z}^2=0$

✓ الحل

أ) المعادلة (أ) تكتب على الشكل $-iz=2-i$ ومنه $z=\frac{2-i}{-i}=\frac{(2-i)i}{1}=1+2i$

ب) المعادلة (ب) تكافئ $(iz-2=0)$ او $(z+2i=0)$ أو $(\bar{z}+1-3i=0)$

تكافئ $\left(z=\frac{2}{i}\right)$ او $(z=-2i)$ أو $(\bar{z}=-1+3i)$

تكافئ $(z=-2i)$ أو $(z=-2i)$ او $(z=-1-3i)$

ومنه مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{-1-3i\ ,-2i\}$

جـ) بما أن $(1-i)^2=-2i$ فإن المعادلة (جـ) تكتب على الشكل $z+2\bar{z}=-2i$

إذا كان $z=x+iy$ فإن $\bar{z}=x-iy$ ومنه المعادلة (جـ) تصبح $3x-iy=-2i$

وهذه الأخيرة تكافئ $3x=0$ و $-y=-2$ اي $x=0$ و $y=2$ ومنه $z=2i$

د) $z^2-\bar{z}^2=0$ يكافئ $x^2-y^2+2ixy-(x^2-y^2-2ixy)=0$

يكافئ $4ixy=0$ يكافئ $xy=0$

$xy=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $(y=0)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{iy, x\}$

تطبيق 13 — تبسيط أعداد

بسط العددين التاليين $z_1=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$ ، $z_2=(3+i)^4$

✓ الحل

أ) $z_1=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(\cos\theta-i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{1}=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$

ب) $z_2=(3+i)^2(3+i)^2$

$=(9-1+6i)^2=64-36+96i=28+96i$

تطبيق 14 — إثبات أن عددا مركبا يكون حقيقيا

z و z' عددان مركبان بحيث $zz'\neq -1$ و $z\bar{z}=z'\bar{z}'=1$

بين أن $\frac{z+z'}{1+zz'}$ عدد حقيقي.

✓ الحل

$\frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي هذا معناه أن $\frac{z+z'}{1+zz'}=\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)}$

$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)}=\frac{\bar{z}+\bar{z}'}{1+\bar{z}\times\bar{z}'}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}\times\frac{1}{z'}}=\frac{z+z'}{1+zz'}$

ومنه نستنتج أن $\frac{z+z'}{1+zz'}$ حقيقي.

تطبيق 15 — تعيين مجموعة النقط

u عدد مركب غير معدوم.

عين مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث :

$\left(\frac{u-\bar{u}z}{1-z}\right)$ حقيقي.

✓ الحل

$\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ حقيقي هذا معناه أن $0=\frac{u-\bar{u}\times z}{1-z}-\overline{\left(\frac{u-\bar{u}\times z}{1-z}\right)}$

$\frac{u-\bar{u}z}{1-z}-\frac{\bar{u}-u\times\bar{z}}{1-\bar{z}}=\frac{u-\bar{u}z-u\bar{z}+\bar{u}\bar{z}z+\bar{u}z+u\bar{z}-uz\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})}$

$=\frac{z\bar{z}(\bar{u}-u)+u}{(1-z)(1-\bar{z})}$

إذن لكي يكون $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ حقيقيا يجب أن يكون $\begin{cases} z\bar{z}(\bar{u}-u)+u=0 \\ z\neq 1 \text{ و } \bar{z}\neq 1 \end{cases}$

اي $z\bar{z}(u-\bar{u})=u$ .... (1)

بما أن $u-\bar{u}$ تخيلي صرف و $z\bar{z}$ حقيقي فإن u تخيلي صرف

وبالتالي $u=bi$ مع $b\in\mathbb{R}^*$.

إذا كان $z=x+iy$ فإن المساواة (1) تكتب $(x^2+y^2)2bi=bi$

وبقسمة طرفي المساواة الأخيرة على $2bi$ نجد $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

إذن مجموعة النقط M بحيث $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ حقيقي هي دائرة (c) مركزها $O(0\ ,\ 0)$

ونصف قطرها $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

تطبيق 16 تعيين طويلة عدد مركب

عين طويلة كل عدد من الأعداد المركبة التالية :

ا) $z=\sqrt{2}+i$ ، ب) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{3}$ ، جـ) $z=\cos\theta+i\sin\theta$

د) $z=\cos\theta-i\sin\theta$ ، هـ) $z=\sin\theta+i\cos\theta$ ، و) $z=(2-3i)(1+5i)$

ن) $z=(1-2i)^3$ ، ي) $z=\frac{4}{(1+i)^2}$ ، ف) $z=\frac{a+ib}{a-ib}$

حيث a و b حقيقيين غير معدومين.

✓ الحل

ا) $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$

ب) $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}$

جـ) $|z|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

د) $|z|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

هـ) $|z|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

و) $|z|=|2-3i||1+5i|=\sqrt{2^2+3^2}\ \sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{338}$

ن) $|z|=\left|(1-2i)^3\right|=|1-2i|^3=\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^3=\left(\sqrt{5}\right)^3=5\sqrt{5}$

ي) $|z|=\frac{4}{\left|(1+i)^2\right|}=\frac{4}{|1+i|^2}=\frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$

ف) $|z|=\left|\frac{a+ib}{a-ib}\right|=\frac{|a+ib|}{|a-ib|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

تطبيق 17 تعيين مجموعة النقط باستعمال الطويلة

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق الشرط المعطى :

ا) $|z|=2$ ، ب) $|z-1+2i|=2$ ، جـ) $|z-1|=4$ ، د) $|z|=|z-2i|$

هـ) $|\bar{z}+i|=2$ ، و) $|z+1-2i|=|\bar{z}-i|$ ، ن) $|2z+4|=|1-2z|$

✓ الحل

بوضع $z=x+iy$ يكون $\bar{z}=x-iy$

ا) $|z|=2$ تعني $\sqrt{x^2+y^2}=2$ وبتربيع الطرفين نجد $x^2+y^2=4$

وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها 2 .

ب) لدينا $z-1+2i=(x-1)+i(y+2)$ ومنه $|z-1+2i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$

$|z-1+2i|=2$ تعني $\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=2$ بالتربيع نجد $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(1,-2)$ ونصف قطرها 2 .

جـ) المساواة $|z-1|=4$ تعني $|(x-1)+iy|=4$

لكن $|(x-1)+iy|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

إذن المساواة $|z-1|=4$ تصبح $(x-1)^2+y^2=16$

وعليه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(1,0)$ ونصف قطرها 4 .

د) لدينا $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ و $|z-2i|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

المساواة $|z|=|z-2i|$ تعني $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ بتربيع الطرفين نجد :

$x^2+y^2=x^2+(y-2)^2$ وبالتبسيط نجد $-y+1=0$

ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $y=1$.

هـ) المساواة $|\bar{z}+i|=2$ تعني $|x+i(-y+1)|=2$ اي $\sqrt{x^2+(-y+1)^2}=2$

بتربيع الطرفين نجد $x^2+(y-1)^2=4$

وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(0,1)$ ونصف قطرها 2 .

و) لدينا $|z+1-2i|=|(x+1)+i(y-2)|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

$|\bar{z}-i|=|x-i(y+1)|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

المساواة $|\bar{z}-i|=|z+1-2i|$ تكافئ $\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

بتربيع الطرفين نجد $x^2+(y+1)^2=(x+1)^2=(y-2)^2$

وبالتبسيط نجد $x-3y+2=0$

ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $x-3y+2=0$.

ن) لدينا $|2z+4|=|(2x+4)+2iy|=\sqrt{(2x+4)^2+4y^2}$

$|1-2z|=|(1-2x)+i(-2y)|=\sqrt{(1-2x)^2+4y^2}$

المساواة $|2z+4|=|1-2z|$ تكافئ $\sqrt{(2x+4)^2+4y^2}=\sqrt{(1-2x)^2+4y^2}$

بتربيع الطرفين نجد $(2x+4)^2=(1-2x)^2$ وبالتبسيط نجد $4x-3=0$

ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $x=\frac{3}{4}$.

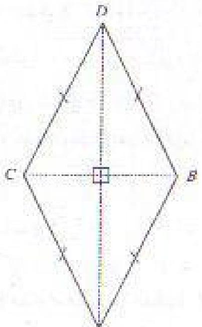
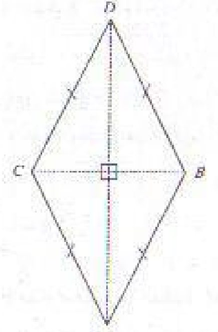
تطبيق 18 — تعيين طبيعة أشكال

C ، B ، A ثلاث نقط لواحقها على التوالي $5i$ ، $2+i$ ، $4+3i$

أ) عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ثم احسب طويلة كل منها، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ معينا.

✓ الحل

أ) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.

$z_B - z_A = 2+i-5i = 2-4i$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هي $z_C - z_A$

$z_C - z_A = 4+3i-5i = 4-2i$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = |z_C - z_A| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

بما أن $AB = AC$ فإن المثلث ABC متقايس الساقين رأسه الأساسي A .

ب) $ABCD$ معين يعني $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

وهذا يعني أيضا $z_B - z_A = z_D - z_C$

ومنه $z_D = z_B - z_A + z_C$

$z_D = 2+i-5i+4+3i = 6-i$

تطبيق 19 — تعيين عمدة عدد مركب

بقراءة بيانية اعط العمدة بالراديان لكل من لواحق مايلي :

أ) النقط A ، B ، D ، E

ب) الأشعة $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{OE}$ ، $\overrightarrow{DA}$

✓ الحل

أ) $arg(z_A) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + 2k\pi = 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$arg(z_B) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi$

$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$arg(z_D) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) + 2k\pi$

$= \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$arg(z_E) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}) + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

ب) $arg(z_{\overrightarrow{AC}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi$

$= \pi + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$arg(z_{\overrightarrow{AD}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AD}) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$

$= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$arg(z_{\overrightarrow{OE}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}) + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$arg(z_{\overrightarrow{DA}}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{DA}) + 2k\pi = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

تطبيق 20 — تعيين عدد مركب علمت عمدته

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $2-5i$ و $1+2i$

و M نقطة مختلفة عن A و B لاحقتها z .

أ) عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{BM}$

ب) اوجد عددا مركبا عمدته هي قيس للزاوية $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$

✓ الحل

أ) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM}$ هي $z_M - z_A$

$z_M - z_A = (x+iy) - (2-5i) = (x-2) + i(y+5)$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $z_M - z_B$

$z_M - z_B = (x+iy)-(1+2i) = (x-1)+i(y-2)$

ب) ليكن Z' عددا مركبا عمدته $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$

$arg(Z') = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = arg(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A})$

ومنه Z' هي احد الأعداد المركبة التي تكتب على الشكل $\alpha \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$ حيث $\alpha \rangle 0$

تطبيق 21 تعيين مجموعة النقط باستعمال العمدة

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث:

$arg(z+2i) = \frac{-\pi}{4} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

✓ الحل

لدينا $z+2i = x + i(y+2)$

نضع $arg(z+2i)=\theta$ و $r=|z+2i|$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ و $\sin\theta = \frac{y+2}{r}$ ومنه $\tan\theta = \frac{y+2}{x}$

و بما ان $\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ فإن $\tan\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

وعليه $\frac{y+2}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ إذن $y = \frac{-\sqrt{2}}{2}x - 2$

تطبيق 22 تعيين القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

نعطي العددين المركبين $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1-i$

1) اعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد z_1 ، z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$

2) اعط الشكل الجبري لـ $\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

✓ الحل

1) ـ لدينا $|z_1| = \sqrt{\frac{6+2}{4}} = \sqrt{2}$

نضع $arg(z_1) = \theta_1$ تحقق $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta_1 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ إذن $z_1 = \left[\sqrt{2}, \frac{-\pi}{6}\right]$

ـ لدينا $|z_2| = \sqrt{2}$ و $\theta_2 = arg(z_2)$ تحقق $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta_2 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ إذن $z_2 = \left[\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right]$

نعلم أن $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

و $arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2) + 2k\pi$

$arg(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{-2\pi+3\pi}{12} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

إذن $\frac{z_1}{z_2} = \left[1, \frac{\pi}{12}\right]$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

بالمطابقة بين الشكل الجبري والمثلثي لـ $\frac{z_1}{z_2}$ نجد:

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

تطبيق 23 كتابة عدد مركب على شكله المثلثي

اكتب على الشكل المثلثي كل من الأعداد المركبة التالية:

أ) $z = (1+i)(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$

ب) $z = (\sqrt{3}+i)^{2007}$

جـ) $z = (\cos\theta - i\sin\theta)^6$

د) $z = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$

✓ الحل

أ) z هو جداء لعددين مركبين هما $z_1=1+i$ و $z_2=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$

$z_1=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $z_2=\left[1,\frac{\pi}{8}\right]$ ومنه $z=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right]$

إذن $z=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{8}\right]$

ب) بوضع $z_1=\sqrt{3}+i$ يكون $z=z_1^{2007}$

$z_1=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$ ومنه $z=\left[2^{2007},\frac{2007\pi}{6}\right]$

لكن $\frac{2007\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+334\pi$ ومنه $z=\left[2^{2007},\frac{\pi}{2}\right]$

جـ) نضع $z_1=\cos\theta-i\sin\theta$ ومنه $z=z_1^6$

$z_1=[1,-\theta]$ ومنه $z=[1,-6\theta]$

د) $z=(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]^5+\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]^5$

$=\left[32,5\frac{\pi}{3}\right]+\left[32,-5\frac{\pi}{3}\right]=64\cos 5\frac{\pi}{3}=32\sqrt{3}$

ومنه $z=[32\sqrt{3},0]$

تطبيق 24 توظيف دستور موافر

كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $(\sqrt{3}+i)^n$ حقيقيا ؟ حقيقيا موجبا ؟ تخيليا صرفا ؟

✓ الحل

نضع $z=\sqrt{3}+i$ ، الشكل المثلثي لـ z هو $z=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$

ومنه $z^n=\left[2^n,\frac{n\pi}{6}\right]$

- يكون z^n حقيقيا إذا كان $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0$ أي $\frac{n\pi}{6}=k\pi$ مع $k\in\mathbb{N}$

ومنه نجد $n=6k$

ومنه مجموعة قيم n المطلوبة هي مضاعفات العدد 6 .

- يكون z^n حقيقيا موجبا إذا كان $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\geq 0$

وهذا يعني أيضا $n=6k$ و $\cos k\pi\geq 0$ لكن $\cos(k\pi)=(-1)^k$

إذن حتى يكون $\cos(k\pi)\geq 0$ يجب أن يكون k زوجي

أي $k=2k'$ ومنه $n=12k'$.

إذن مجموعة قيم n المطلوبة هي مضاعفات العدد 12 .

- يكون z^n تخيليا صرفا إذا كان $\cos\frac{n\pi}{6}=0$

ومنه ينتج $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{N}$

ومنه نجد $n=3+6k$ مع $k\in\mathbb{N}$

إذن قيم n المطلوبة هي متتالية حسابية حدها الأول 3 وأساسها 6 .

تطبيق 25 تعيين عمدة عدد مركب

أوجد عمدة العدد المركب z وذلك حسب قيم العدد الحقيقي x حيث :

$z=\sqrt{2}(x^2-3x+2)(\cos\theta+i\sin\theta)$

✓ الحل

$$|z|=\left|\sqrt{2}(x^2-3x+2)\right|=\begin{cases}\sqrt{2}(x^2-3x+2) & , x\in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[\\ -\sqrt{2}(x^2-3x+2) & , x\in]1,2[\\ 0 & , x=1 \text{ أو } x=2\end{cases}$$

الحالة الأولى لما $x\in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

لتكن $\arg(z)=\alpha$ تحقق $\begin{cases}\cos\alpha=\cos\theta\\ \sin\alpha=\sin\theta\end{cases}$ .... (I) ومنه $\tan\alpha=\tan\theta$

$\tan\alpha=\tan\theta$ تكافئ $\alpha=\theta+k\pi$ تكافئ $\begin{cases}\alpha=\theta+2k'\pi\\ \alpha=\theta+\pi+2k'\pi\end{cases}$

$\alpha=\pi+\theta+2k'\pi$ لا تحقق الجملة (I)

و $\alpha=\theta+2k'\pi$ تحقق الجملة (I) ومنه $z=\left[\sqrt{2}(x^2-3x+2),\theta\right]$

الحالة الثانية $x\in]1,2[$

$|z|=-\sqrt{2}(x^2-3x+2)$

و $\arg(z)=\alpha$ تحقق $\begin{cases}\cos\alpha=-\cos\theta\\ \sin\alpha=-\sin\theta\end{cases}$ .... (II) ومنه $\tan\alpha=\tan\theta$

$\tan\alpha=\tan\theta$ تكافئ $(\alpha=\theta+\pi+2k\pi)$ أو $(\alpha=\theta+2k\pi)$

$\alpha=\theta+\pi+2k\pi$ تحقق الجملة (II)

و $\alpha=\theta+2k\pi$ لا تحقق (II) ومنه $z=\left[-\sqrt{2}(x^2-3x+2),\theta+\pi\right]$

تطبيق 26 إثبات أن أربع نقط تقع على نفس الدائرة

نعتبر النقط A، B، C، D لواحقها على الترتيب:
$z_A=-1+2i$ ، $z_B=4+3i$ ، $z_C=3i$ ، $z_D=4-3i$

أ) احسب $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ و $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}$

ب) ماهي طبيعة المثلثين ACD و BCD ؟

جـ) بين أن النقط A، B، C، D تقع على دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

✓ الحل

أ) $$\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{3i+1-2i}{4-3i+1-2i}=\frac{1+i}{5-5i}=\frac{(1+i)^2}{5(1-i)(1+i)}=\frac{-2i}{10}=\frac{-i}{5}$$

$$\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}=\frac{3i-4-3i}{4-3i-4-3i}=\frac{-4}{-6i}=\frac{-4i}{6}=\frac{-2}{3}i$$

ب) $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ومنه فإن المثلثين ACD و BCD قائمان في A و B على الترتيب.

جـ) بما أن ACD قائم في A فإن النقط A، D، C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها I منتصف $[DC]$

لكي تنتمي B إلى الدائرة (C) يكفي أن نبين أن $IB=IA$.

$z_I=2$ ومنه $IB=\sqrt{13}$ و $IA=\sqrt{13}$ إذن B تنتمي إلى (C)

وعليه النقط A، B، C، D تنتمي إلى نفس الدائرة (C).

تطبيق 27 الأعداد المركبة والمتتالية الهندسية

(z_n) متتالية الأعداد المركبة معرفة بـ $\begin{cases} z_0=4 \\ z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n \end{cases}$ مع $n\in\mathbb{N}$

1) أوجد عمدة و طويلة كل من z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 ، z_5

2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع $\Delta_n=|z_{n+1}-z_n|$

أ) احسب Δ_{n+1} بدلالة Δ_n .

ب) بين أن المتتالية (Δ_n) هندسية يطلب ايجاد حدها الأول و أساسها.

جـ) احسب Δ_n واستنتج العدد الطبيعي n_0 بحيث لما $n\geq n_0$ يكون $\Delta_n < 10^{-2}$

✓ الحل

1) $z_0=[4,0]$ و $\alpha=\frac{1}{2}(1+i)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right]$

$z_1=\alpha z_0$ ومنه $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

$z_2=\alpha z_1$ ومنه $z_2=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$

$z_3=\alpha z_2$ ومنه $z_3=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

$z_4=\alpha z_3$ ومنه $z_4=[1,\pi]$

$z_5=\alpha z_4$ ومنه $z_5=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$

2-أ) $\Delta_{n+1}=|z_{n+2}-z_{n+1}|=\left|\frac{1}{2}(1+i)z_{n+1}-\frac{1}{2}(1+i)z_n\right|$

$=\left|\frac{1}{2}(1+i)\right||z_{n+1}-z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_n$

ب) من المساواة $\Delta_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_n$ نستنتج أن (Δ_n) متتالية هندسية أساسها $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

وحدها الأول $\Delta_0=|z_1-z_0|=2\sqrt{2}$ ومنه $\Delta_n=\Delta_0\times r^n=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$\Delta_n<10^{-2}$ يكافئ $2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n<10^{-2}$ يكافئ $2^{-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}}<10^{-2}$

يكافئ $-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}<-\frac{2Ln(10)}{Ln(2)}$ يكافئ $-\frac{1}{2}n<-8,15$

اصغر عدد طبيعي n_0 هو 17 .

تطبيق 28 كتابة عدد مركب على الشكل المثلثي

u عدد مركب حيث $u=1+i$

1) اكتب كل من u و $\bar{u}$ على الشكل المثلثي

2) ليكن n عدد طبيعي، نضع $S_n=u^n+\bar{u}^n$

أ) اكتب S_n على الشكل المثلثي ثم استنتج أن $S_n=\lambda_n\cos\frac{n\pi}{4}$ حيث λ_n عدد حقيقي يطلب ايجاده بدلالة n .

ب) اوجد قيمة n بحيث $S_n=0$

جـ) بين أنه إذا كان n زوجيا فإن S_n عدد صحيح .

✓ الحل

1) الشكل المثلثي للعددين u و $\bar{u}$ هما $u=\left[\sqrt{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ و $\bar{u}=\left[\sqrt{2}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\right]$

2 أ) $S_n=\left[(\sqrt{2})^n\ ,\ \frac{n\pi}{4}\right]+\left[(\sqrt{2})^n\ ,\ -\frac{n\pi}{4}\right]=2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$

ومنه $\lambda_n=2(\sqrt{2})^n$

ب) $S_n=0$ تكافئ $\cos\frac{n\pi}{4}=0$ تكافئ $\frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{N}$

ومنه $n=2+4k$

جـ) n زوجي هذا معناه أن $n=2n'$ ومنه $S_n=2(\sqrt{2})^{2n'}\cos\frac{n'\pi}{2}$

$$S_n=2\times\left[(\sqrt{2})^2\right]^{n'}\times\cos\frac{n'\pi}{2}$$

$$=2\times(2)^{n'}\cos\frac{n'\pi}{2}=2^{n'+1}\cos\frac{n'\pi}{2}$$

من اجل كل عدد طبيعي n' فإن $\cos n'\frac{\pi}{2}$ يأخذ القيم -1 , 0 , 1 .

وبالتالي نستنتج أن S_n عدد صحيح.

تطبيق 29 الأعداد المركبة والأشكال الهندسية

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لواحقها 1 ، $2i$ ، z على التوالي.

1) ماذا تمثل هندسيا $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$ و $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$ ؟

2) في مايلي نرمز بـ α إلى العدد الحقيقي من المجال $]-\pi,0[$ بحيث $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$

النقطة C معرفة بـ $BC=\sqrt{\frac{2}{5}}BA$ و $(\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BC})=\alpha$

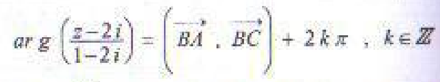
احسب القيمة المضبوطة لـ $\sin\alpha$

3) بين أن $\frac{z-2i}{1-2i}=\frac{1-3i}{5}$ واستنتج قيمة z.

4) علم النقطة C ثم تحقق أن المثلث ABC متقايس الساقين رأسه الأساسي A.

✓ الحل

1) $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|=\left|\frac{z-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{BC}{BA}$



$$\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)=\left(\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

2) لدينا $\cos\alpha^2+\sin\alpha^2=1$ ومنه $\sin\alpha^2=\frac{9}{10}$

ومنه ينتج $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$ أو $\sin\alpha=\frac{-3}{\sqrt{10}}$

بما أن $\cos\alpha > 0$ و $\alpha\in]-\pi,0[$ فإن $\sin\alpha=\frac{-3}{\sqrt{10}}$

3) $\frac{BC}{BA}=\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|=\sqrt{\frac{2}{5}}$

$$\left(\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)=\alpha$$

ومنه $\frac{z-2i}{1-2i}=\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}i\right)=\frac{1}{5}-\frac{-3}{5}i=\frac{1}{5}(1-3i)$

استنتاج قيمة z :

من المساواة $\frac{1-3i}{5}=\frac{z-2i}{1-2i}$ نجد $z-2i=-1-i$

إذن $z=-1+i$

4) لدينا $AB=|z_B-z_A|=\sqrt{5}$ و $AC=|z_C-z_A|=\sqrt{5}$

ومنه ABC مثلث متقايس الساقين رأسه الأساسي A .

تطبيق 30 الكتابة الأسية لعدد مركب

z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $z_1=-1-i$ و $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكلين الجبري والأسي

2) استنتج طويلة و عمدة $\frac{z_1}{z_2}$ ثم عين القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{11\pi}{2}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

✓ الحل

1) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1-i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{1} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

لدينا $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$ و $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i5\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$ و $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{11\pi}{12}+2\pi k$

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ .... (1)

$\frac{z_1}{z_2} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$ .... (2)

من (1) و (2) نجد

$$\begin{cases} \cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

تطبيق 31 الكتابة الأسية وطبيعة أشكال

A و B نقطتان لاحقتاهما $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $Z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1) عين النقطة C بحيث الرباعي $OACB$ متوازي أضلاع حيث O مبدأ المعلم $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

2) عين قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ ماذا تستنتج حول الرباعي $OACB$ ؟

✓ الحل

1) $OACB$ متوازي أضلاع يعني $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

المساواة $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ تعني $z_C = z_B+z_A$

ومنه $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z_C = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)+2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+1+\sqrt{3}i$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)+i\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

2) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{-z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B)-\arg(z_A)$

$$= -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه $\overrightarrow{OA}$ عمودي على $\overrightarrow{OB}$ وعليه الرباعي $OACB$ مستطيل.

تطبيق 32 الكتابة الأسية ودساتير التحويل

θ عدد حقيقي يختلف عن $\pi+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ و $t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{3}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}$

1) احسب $\frac{2t}{1+t^2}$ و $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\frac{2t}{1-t^2}$ بدلالة θ

2) بين أن $\sin\theta = \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$ و $\cos\theta = \frac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

و $\tan\theta = \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

✓ الحل

1) $t = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = i\tan(\frac{\theta}{2})$

$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2i\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$ ، $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2i\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}$ ، $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

2) $\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{\cos\theta}+i\tan\theta$ .... (1)

$\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}+\frac{2i\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}$ .... (2)

من (1) و (2) نجد

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})} \\ \tan\theta = 2\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

ومنه $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$ و $\tan\theta = \dfrac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

ولدينا $\sin\theta = \cos\theta \times \tan\theta$

إذن $\sin\theta = \dfrac{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} \times \dfrac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{2\tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}$

تطبيق 33 حساب مجاميع

1) احسب u^7 حيث $u = e^{2i\frac{\pi}{7}}$

2) نضع $S = u+u^2+u^4$ و $T = u^3+u^5+u^6$

بين ان S و T مترافقان وان الجزء التخيلي لـ S عدد حقيقي موجب.

3) احسب $S+T$ و ST

4) استنتج ان $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = \frac{-1}{2}$

و $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

الحل

1) $u^7 = (e^{2i\frac{\pi}{7}})^7 = e^{2i\frac{\pi}{7}\times 7} = e^{2i\pi} = 1$

2) $\overline{S} = \overline{u+u^2+u^4} = \bar{u} + \bar{u}^2 + \bar{u}^4 = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4} = \frac{u^3+u^2+1}{u^4}$

$= \frac{u^6+u^5+u^3}{u^7} = u^6+u^5+u^3 = T$

(لأن $u\bar{u} = 1$ و $u^7 = 1$)

ومنه S و T مترافقين

الجزء التخيلي لـ T هو $\sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7}$

وبما ان الزوايا $\frac{6\pi}{7}$ و $\frac{10\pi}{7}$ و $\frac{12\pi}{7}$ تنتمي إلى $]\pi, 2\pi[$

فإن $\sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7} < 0$

وبما ان الجزء التخيلي لـ S هو نظير الجزء التخيلي لـ T

اي $\text{Im}(S) = -\text{Im}(T)$ فإن $\text{Im}(S) > 0$

3) $S+T = u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6$

$= 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6-1$

$= \frac{1-u^7}{1-u} - 1 = -1$

$ST = (u+u^2+u^4)(u^3+u^5+u^6)$

$= 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6+2$

$= \frac{1-u^7}{1-u} + 2 = 2$

إذن $\begin{cases} S+T = -1 \\ ST = 2 \end{cases}$ .... (1)

4) من المساواة $S+T=-1$ نجد $T=-1-S$ نعوضه في المساواة $S\times T = 2$ نجد :

$S^2+S+2=0$ وبعد حل هذه المعادلة نجد $S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ ، $S = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

وبما أن الجزء التخيلي لـ S موجب فإن $S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

لدينا $S = (\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}) + i(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7})$

بالمطابقة بين الشكل الجبري و الشكل المثلثي لـ S نجد :

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = \frac{-1}{2} \\ \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

تطبيق 34 الشكل الأسي والجبري والمتتالية الهندسية

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$،

a و z_0 عددان مركبان بحيث $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ، $z_0 = 6+6i$

ولتكن A_0 صورة z_0

من احل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نرمز بـ A_n إلى النقطة ذات اللاحقة z_n المعرفة بـ $z_n = a^n \times z_0$

1) أ) اكتب z_1 و a^2 على الشكل الجبري ثم اكتب z_1 على الشكل الأسي

وبين ان $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب) عبر عن z_3 ثم z_7 بدلالة z_1 و a^2 مستنتجا عبارتي z_3 و z_7 على الشكل الأسي.

2) من احل كل عدد طبيعي n نضع $|z_n| = r_n$

أ) بين انه من احل كل عدد طبيعي n يكون $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

ب) استنتج ان المتتالية (r_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

جـ) عين نهاية المتتالية (r_n) وفسر هندسيا النتيجة المحصل عليها.
د) عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم p بحيث $OA_p \leq 10^{-3}$
واعط قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_p})$

✓ الحل

1) أ) $z_1 = a^1 z_0 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)(6+6i)$

$$z_1 = \left[\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2} - \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)\right] + i\left[\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1) + \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)\right]$$

$$z_1 = 3 + i3\sqrt{3}$$

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 + 2i\frac{\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{16} - \frac{4-2\sqrt{3}}{16} + 2i\frac{3-1}{16}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{16} + \frac{4i}{16} = \frac{4}{16}(\sqrt{3}+i)$$

لدينا $|z_1| = 6$ و $arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$ ومنه $z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$

لدينا $|a^2| = \frac{1}{2}$ و $arg(a^2) = \frac{\pi}{6}$ ومنه $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب) لدينا $a^4 = \frac{1}{24}z_1^2$

$$z_7 = a^7 z_0 = a^4 a^2 a z_0 = \frac{1}{24} z_1 a^2 z_1 = \frac{1}{24} a^2 z_1^2$$

$$z_7 = \frac{1}{24} \times \frac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \times 36e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_3 = a^3 z_0 = a^2 z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \times 6e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2) أ) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ومنه $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|z_n| = |a^n|\,|z_0| = |a|^n \times |z_0|$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times 6\sqrt{2} = 12\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$$

ب) $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه $|z_n|$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدها الأول

$$|z_0| = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

جـ) بما أن $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$

بما أن $|z_n| = \left\|\overrightarrow{OA_n}\right\|$ و $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$

فإنه كلما كبر n كلما اقتربت النقط A_n من النقطة O على مسار حلزوني.

د) $OA_p < 10^{-3}$ هذا معناه أن $|z_p| \leq 10^{-3}$ أي $r_p \leq 10^{-3}$

$r_p \leq 10^{-3}$ تكافئ $12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1} \leq 10^{-3}$ تكافئ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1} \leq \frac{10^{-3}}{12}$

ومنه $p+1 \geq \dfrac{Ln\left(\frac{10^{-3}}{12}\right)}{-Ln(\sqrt{2})}$

إذن $p \geq 26{,}09$.

وبالتالي فإن أصغر عدد طبيعي p هو 27 .

حساب قيس الزاوية $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_p})$:

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_p}) = arg(z_{27}) = arg(a^{27} \times z_0) + 2k\pi$$

$$= arg(a^{27}) + arg(z_0) + 2k\pi = \frac{\pi}{12}27 + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$= \frac{30\pi}{12} + 2k\pi = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

تطبيق 35 حل معادلات من الدرجة الرابعة

نعتبر كثير الحدود $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ حيث z عدد مركب
1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث
$p(z) = (z^2+az+b)(z^2+4z+2a)$
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

✓ الحل

1) بعد نشر $(z^2+az+b)(z^2+4z+2a)$ ومطابقته مع عبارة $p(z)$ نجد :

$$\begin{cases} a+4=0 \\ 6a+b=-19 \\ 4b+2a^2=52 \\ 2ab=-40 \end{cases}$$ ومنه ينتج $$\begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$$

2) $p(z)=0$ يعني $\begin{cases} z^2-4z+5=0 \ ... \ (1) \\ \text{أو} \\ z^2+4z-8=0 \ ... \ (2) \end{cases}$

حل المعادلة (1):

$$\Delta = 16-4(1)(5) = -4 = (2i)^2$$

$$z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2+i \ ، \ z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

حل المعادلة (2):

$\Delta=16-4(1)(-8)$ ومنه $\Delta=48$

$$z_3 = \frac{-4+4\sqrt{3}}{2} = -2+2\sqrt{3} \ ، \ z_4=\frac{-4-4\sqrt{3}}{2} = -2-2\sqrt{3}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $\{z_1 , z_2 , z_3 , z_4\}$

تطبيق 36 حل معادلات من الدرجة الرابعة

من أجل كل عدد مركب z نضع $p(z)=z^4-1$

1) أ) حلل $p(z)$ إلى جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية.

ب) استنتج حلول المعادلة $p(z)=0$ في $\mathbb{C}$.

2) استنتج من السؤال السابق حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$ .... (*) في $\mathbb{C}$.

الحل

1) أ) $p(z)=(z^2-1)(z^2+1)$

ب) $p(z)=0$ يعني $z^2-1=0$ أو $z^2+1=0$

حلا المعادلة $z^2-1=0$ هما 1 ، -1

حلا المعادلة $z^2+1=0$ هما i ، $-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $\{1,-1 , i,-i\}$

2) نضع $z'=\frac{2z+1}{z-1}$ عندئذ المعادلة (*) تصبح $z'^4=1$ أي $z'^4-1=0$

ومنه z' عنصر من $\{1 ,-1 , i , -i\}$

$z'=\frac{2z+1}{z-1}$ يكافئ $z=\frac{z'+1}{z'-2}$

- إذا كان $z'=-1$ فإن $z=0$
- إذا كان $z'=i$ فإن $z=-\frac{3}{5}-\frac{3}{5}i$
- إذا كان $z'=-i$ فإن $z=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$
- إذا كان $z'=1$ فإن $z=-2$

إذن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $\left\{0 ، -\frac{3}{5}-\frac{3}{5}i ، -\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i ، -2\right\}$

تطبيق 37 حل معادلات من الدرجة الثالثة

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i=0$ .... (1)

مع العلم أنها تقبل حلا تخيليا صرفا.

الحل

$z=iy$ حل تخيلي صرف للمعادلة (1) معناه أن:

$$(iy)^3-(3+4i)(iy)^2-6(3-2i)(iy)+72i=0$$

$$-iy^3+3y^2+4y^2i-18iy-12y+72i=0$$

$$(3y^2-12y)+i(-y^3+4y^2-18y+72)=0$$

ومن المساواة الأخيرة ينتج $\begin{cases} 3y^2-12y=0 \\ -y^3+4y^2-18y+72=0 \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $y=4$

إذن $z=4i$ حل تخيلي لـ (1)

من أجل كل z من $\mathbb{C}$ لدينا:

$$z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i=(z-4i)(z^2+az+b)$$

بعد النشر والتبسيط و المطابقة نجد $b=-18$ و $a=-3$

المعادلة (1) تكافئ $z=4i$ أو $z^2-3z-18=0$ .... (I)

حل المعادلة (I)

$$\Delta = 9-4(1)(-18) = 81$$

ومنه المعادلة (I) لها حلان $z_1=\frac{3+9}{2}=6$ و $z_2=\frac{3-9}{2}=-3$

إذن المعادلة (1) لها ثلاثة حلول -3 ، 6 ، $4i$

تطبيق 38 حل معادلات وكتابة الحلول على الشكل المثلثي

ليكن α عددا حقيقيا من المجال $[0 , \pi]$ و z عدد مركب.
نعتبر كثير الحدود $p(z)$ المعرف بـ:
$$p(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$$
1) بين أن $p(z) = (z-1)\left[z^2 + (2\sin\alpha)z + 1\right]$
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$ ثم عين عمدة و طويلة كل حل.

✓ الحل

1) $$(z-1)\left[z^2+(2\sin\alpha)z+1\right] = z^3 + 2\sin\alpha\, z^2 + z - z^2 - 2\sin\alpha\, z - 1$$
$$= z^3 + (2\sin\alpha - 1)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1 = p(z)$$

2) $p(z)=0$ يكافئ $(z=1)$ أو $(z^2 + 2\sin\alpha\, z + 1 = 0)$

حل المعادلة $z^2 + 2\sin\alpha\, z + 1 = 0$ .... (*)
$$\Delta = 4\sin^2\alpha - 4 = 4(-\cos^2\alpha) = (2i\cos\alpha)^2$$
ليكن z_1 ، z_2 حلي المعادلة (*)
$$z_1 = \frac{-2\sin\alpha + 2i\cos\alpha}{2} = -\sin\alpha + i\cos\alpha$$
$$z_2 = \frac{-2\sin\alpha - 2i\cos\alpha}{2} = -\sin\alpha - i\cos\alpha$$
تعيين طويلة و عمدة الحلول:
الحل الأول هو 1 ومنه $1 = [1 , 0]$

$|z_1| = 1$ و $arg(z_1) = \theta_1$ تحقق $\begin{cases}\cos\theta_1 = -\sin\alpha \\ \sin\theta_1 = \cos\alpha\end{cases}$

ومنه $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi$ إذن $z_1 = \left[1 , \frac{\pi}{2} + \alpha\right]$

$|z_2| = 1$ و $arg(z_2) = \theta_2$ تحقق $\begin{cases}\cos\theta_2 = -\sin\alpha \\ \sin\theta_2 = -\cos\alpha\end{cases}$

ومنه $\theta_2 = \frac{3\pi}{2} - \alpha$ إذن $z_2 = \left[1 , \frac{3\pi}{2} - \alpha\right]$

تطبيق 39 حل معادلات من الدرجة الرابعة

من أجل كل عدد مركب z نضع $p(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 2$
1) بين أنه إذا كان α حلا للمعادلة $p(z)=0$ فإن $\overline{\alpha}$ حل آخر لهذه المعادلة.

2) بين أن $(1+i)$ و $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ حلان للمعادلة $p(z)=0$
3) استنتج أن $p(z)$ هو جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية.

✓ الحل

1) α حل للمعادلة $p(z)=0$ يعني $p(\alpha)=0$

لدينا $\overline{p(\alpha)} = 0$ أي $\overline{\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 + 2} = 0$

وحسب خواص المرافق نجد $\overline{\alpha}^4 - \overline{\alpha}^3 + \overline{\alpha}^2 + 2 = 0$ لكن $\overline{\alpha}^4 - \overline{\alpha}^3 + \overline{\alpha}^2 + 2 = p(\overline{\alpha})$

إذن $p(\overline{\alpha}) = 0$

وهذا يعني أن $\overline{\alpha}$ حل للمعادلة $p(z)=0$.

2) يمكنك التحقق أن $p(1+i) = 0$ و $p\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$

3) بما أن $\alpha = 1+i$ حل فإن $1-i$ حل أيضا

بما أن $\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ حل فإن $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ حل أيضا

وعليه $p(z) = (z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z-\overline{\beta})$
$$= \left[z^2 - (\alpha+\overline{\alpha})z + \alpha\overline{\alpha}\right]\left[z^2 - (\beta+\overline{\beta})z + \beta\overline{\beta}\right]$$
$$= \left[z^2 - 2z + 2\right]\left[z^2 + z + 1\right]$$

تطبيق 40 معادلة من الدرجة الثالثة بمعاملات مركبة

$p(z)$ كثير حدود معرف بـ:
$$p(z) = z^3 + (5i-6)z^2 + (9-24i)z + 13i + 18$$
1) بين أن المعادلة $p(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.
3) النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 حلول المعادلة $p(z)=0$ حيث $|z_2| > |z_1| > |z_0|$ ما نوع المثلث ABC ؟

✓ الحل

1) $z = iy$ حل للمعادلة $p(z)=0$ هذا معناه أن $p(iy)=0$ بعد الحساب نجد:
$y = -1$ ومنه $z = -i$

2) لدينا $p(z) = (z+i)\left[z^2 + (4i-6)z + 13 - 18i\right]$

$p(z)=0$ يكافئ $(z=-i)$ أو $(z^2 + (4i-6)z - 18i = 0)$

نضع $z^2 + (4i-6)z - 18i = 0$ .... (1)

$$\Delta' = (2i-3)^2 - (-18i+13) = -8+6i$$

الجذران التربيعيان لـ Δ هما $1+3i$ و $-1-3i$ ومنه حلا المعادلة (1) هما ،

$$z_1 = \frac{-2i+3+1+3i}{1} = 4+i \quad \text{و} \quad z_2 = -2i+3-1-3i = 2-5i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $-i$ ، z_1 ، z_2

$$arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = arg\left(\frac{2-5i+i}{4+i+i}\right) = arg\left(\frac{2-4i}{4+2i}\right)$$

$$= arg\left(\frac{-20i}{20}\right) = arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

إذن المثلث ABC قائم في A .

تطبيق 41 تعيين مجموعة النقط

z عدد مركب غير معدوم و z' عدد مركب حيث $z' = \frac{-2}{z}$

1) ماهي العلاقة التي تربط بين طويلتي و عمدتي z و z' ؟

2) في المستوي المركب M نقطة لاحقتها z و M' لاحقتها z' ،

(D) قرص مركزه النقطة O ونصف قطره 2 ماعدا النقطة O ،

A نقطة لاحقتها a بحيث $|a|=2$ و $arg(a)=\frac{\pi}{4}$

أ) ماهي مجموعة النقط M' لما M تمسح (D) ؟

ب) ماهي مجموعة النقط M' لما M تمسح القطعة $[OA]$ ما عدا O ؟

✓ الحل

1) $|z'| = \frac{2}{|z|}$ و $arg(z') = arg(-2) - arg(z)$

$arg(z') = \pi - arg(z)$

2) أ) M تمسح (D) هذا معناه أن $OM < 2$ أي $|z| < 2$ ومنه $|z'| > 1$

ومنه مجموعة النقط M' تمسح كل المستوي ماعدا القرص (D') الذي مركزه النقطة O ونصف قطره 1 .

ب) M تمسح القطعة $[OA]$ ما عدا النقطة O هذا معناه أن ؛

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = 0$ و $OM < OA$

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$$

$$= -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$$

$$= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) - \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) - \frac{3\pi}{4}$$

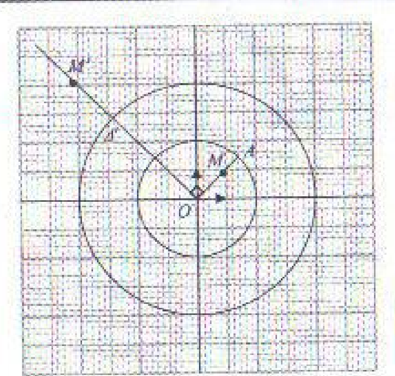
إذن $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{3\pi}{4}$

$OM < OA$ هذا معناه $|z| < 2$

ومنه $|z'| > 1$

وبالتالي

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{3\pi}{4} \\ \text{و} \\ \|\overrightarrow{OM'}\| > 1 \end{cases} \quad \text{.......... (I)}$$

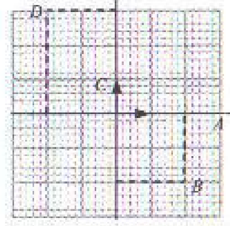


لتكن A' نقطة حيث $OA'=1$ و $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{3\pi}{4}$

إذن لما M تمسح القطعة $[OA]$ ما عدا النقطة O

فإن النقطة M' تمسح نصف المستقيم $[OA')$ ما عدا القطعة $[OA']$.





1 اعتمادا على الشكل التالي عين لواحق :

أ) النقط A ، B ، C ، D

ب) الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OD}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AB}$

---

2 اعط الشكل الجبري للأعداد المركبة التالية :

أ) $z=(2+i)(3-2i)$ ، ب) $z=(1-i)^5$ ، جـ) $z=(3+i)^2(1-i)$

د) $z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ ، هـ) $z=\frac{3-2i}{3+2i}$

و) $z=\frac{1-2i}{2+i}-\frac{3}{2-i}$ ، ن) $z=\left(\frac{2-3i}{1-i}\right)\left(\frac{1+3i}{-1+i}\right)$

---

3 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات والجمل المقترحة (إعطاء الحل على الشكل الجبري) :

أ) $(1+3i)z=2-i$ ، ب) $(1+2i)z=2+z$ ، جـ) $z^2-(1-i)^2=0$

د) $(z-4)(-iz+1)=0$ ، هـ) $z^2-9=0$ ؛ و) $z^2+16=0$

ن) $\frac{z+3}{z-3}=2i$ ، ي) $\begin{cases} z-z'=2 \\ iz-z'=2i \end{cases}$

---

4 نضع $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان :

نرفق بكل عدد مركب z العدد $Z=2\bar{z}-2+6i$

1) احسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي لـ Z

2) هل يوجد عدد حقيقي z بحيث $Z=z$ ؟

---

5 من أجل كل عدد مركب $z \neq -1$ نضع $Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ مع $z=x+iy$

1) احسب بدلالة x و y الجزء التخيلي والحقيقي للعدد المركب Z .

2) z لاحقته النقطة M في المستوي المركب.

ما هي مجموعة النقط M لما يكون Z تخيليا صرفا ؟

---

6 1) عين الأعداد المركبة z بحيث العدد $\frac{z}{1-2i}$

أ) عددا حقيقيا ، ب) عددا تخيليا صرفا.

2) ارسم في المستوي المركب مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق شرطي السؤال (1)

---

7 عين مرافق كل عدد من الأعداد المركبة التالية :

أ) $z=8$ ، ب) $z=i(5-3i)$ ، جـ) $z=(1+i)(3-5i)$ ،

د) $z=(2-3i)^7$ هـ) $z=(3-2i)^4(5-i)^6$ ، و) $z=\frac{4i-1}{3-i}$ ،

ن) $z=\frac{(1-i)^5}{3-i}$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ) $z-2\bar{z}+2=0$ ب) $(1-i)\bar{z}=1+i$ ،

جـ) $\bar{z}+1-i=i\bar{z}+3$ د) $(3z+1-i)(i\bar{z}+i-1)=0$ ،

هـ) $z+2\bar{z}=(1-i)^2$ و) $\frac{\bar{z}-2}{\bar{z}+2}=i$

---

8 من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة z نعتبر العدد المركب $z'=z^2$

1) نضع $z=x+iy$ مع x و y حقيقيان.

أ) عبر عن الجزء التخيلي والحقيقي لـ z' بدلالة x و y .

ب) عين ثم ارسم مجموعة النقط M بحيث يكون العدد z' ؛

- حقيقيا.
- تخيليا صرفا.

2) أوجد النتائج السابقة وهذا باستعمال خصائص المرافق.

---

9 z عدد مركب بحيث $z=x+iy$ مع x و y حقيقيان

ليكن Z عددا مركبا بحيث $Z=iz-2i+\bar{z}-3$

1) احسب بدلالة x و y الجزء التخيلي والجزء الحقيقي لـ Z

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z=0$ ذات المجهول z .

---

10 z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $z_1=1+\cos x+i\sin x$ و $z_2=1-\cos x-i\sin x$

1) اكتب كل من z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

2) ليكن j عددا مركبا بحيث $j=\frac{z_2}{z_1}$

أ) عين قيم x بحيث يكون العدد المركب j له معنى.

ب) بسط عبارة j وهذا باستعمال نتائج السؤال (1) وباستعمال خصائص المرافق.

---

11) A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها الأعداد المركبة a ، b ، c على الترتيب.

بين أن ABC مثلث قائم في A يكافئ أن $\frac{b-a}{c-a}+\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}=0$.

12) A ، B ، C نقط لواحقها على التوالي $3+5i$ ، $5+i$ ، $7+3i$.

1) عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم عين طويلة كل منهما ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2) عين النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ عبارة عن معين.

13) A و B نقطتان مختلفتان من المستوي المركب لاحقتيهما العددين المركبين a و b على الترتيب ، M نقطة كيفية لاحقتها العدد المركب z .

عين لاحقة النقطة M' نظيرة النقطة M بالنسبة إلى المستقيم (AB) .

14) A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها الأعداد المركبة a ، b ، c على التوالي

1) بين أن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة يكافئ أن :

$a(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b})=0$

2) نفرض أن $A(1+i)$ ، $B(3-i)$

عين العلاقة بين z و $\overline{z}$ بحيث تكون النقطة M ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم (AB) .

15) اكتب على الشكل المثلثي كل عدد من الأعداد المركبة التالية :

أ) $z=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^7$ ، ب) $z=(1-i)^{2007}$

جـ) $z=(1-i)\left(\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}\right)$ ، د) $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$

16) j عدد مركب بحيث $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) اكتب على الشكل الجبري الأعداد j^2 ، j^3 ، j^5 ، j^{10} .

2) بين أن متتالية الأعداد المركبة z_n المعرفة بـ $z_n=j^n$ دورية يطلب تحديد دورها.

3) نضع $S_n=1+j+j^2+j^3+...+j^n$.

أ) احسب S_2

ب) بين أن $S_n=\frac{1-j^{n+1}}{1-j}$

جـ) بسط عبارة S_n لما $n=3p$ ، $n=3p+1$ ، $n=3p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$.

17) z عدد مركب بحيث $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

نضع $A=z+z^4$ و $B=z^2+z^3$

1) بين أن $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ ثم استنتج أن B و A هما حلان للمعادلة (E) .... $x^2+x-1=0$

2) أوجد A بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$

3) حل المعادلة (E) ثم استنتج قيمة $\cos\frac{2\pi}{5}$

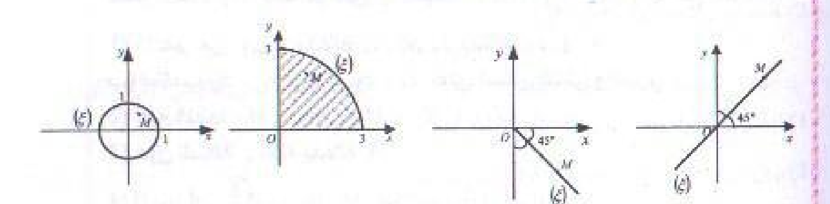
18) A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على التوالي $1+\sqrt{3}+i$ ، $1+\sqrt{3}-i$ ، $1-2i$.

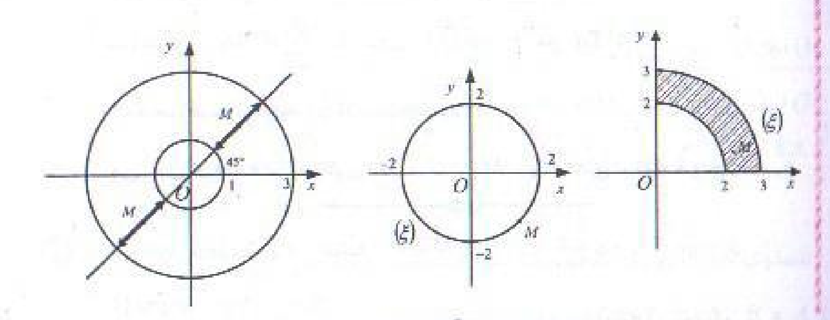
1) بين أن النقط A ، B ، C تقع على نفس الدائرة التي مركزها O مبدأ المعلم.

2) قارن بين z_C و z_B-z_A ثم بين أن الرباعي $OABC$ عبارة عن معين.

19) في كل حالة من الحالات التالية مثلنا المجموعة (ξ) من النقاط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث $z=[r,\theta]$

عبر بدلالة θ أو r أو كلاهما عن هذه المجموعة (ξ)





20) θ عدد حقيقي من $\left]\frac{-\pi}{2},0\right[$

عين عمدة و طويلة العدد المركب $Z=\sin 2\theta-2i\sin^2\theta$

21 عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالتين التاليتين و مثلها

1) $|z| = 2|z-i|$

2) $|z| \leq 2|z-i|$

22 في المستوي المركب، مثل مجموعة النقط M التي لواحقها Z تحقق الشرط المعطى مع $(k \in \mathbb{Z})$

1) $arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

2) $arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

3) $arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2\pi}{3}$

4) $arg(z+i) = arg(z) + arg(i) + 2\pi k$

23 في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$

نعتبر النقط M_n ذات اللواحق z_n حيث $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

1) أ) عبر عن z_{n+1} بدلالة z_n ثم z_n بدلالة z_0 و n.

ب) اكتب z_0 ، z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 على الشكل المثلثي والجبري .

2) علم النقط M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4.

3) عين المسافة OM_n بدلالة n.

4) أ) بين أن $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب) نضع $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_k M_{k+1}$ عين L_n بدلالة n ثم $\lim_{n\to+\infty} Ln$.

5) أوجد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ بدلالة n،

من أجل أي قيمة لـ n تكون النقط O ، M_0 ، M_n على استقامة واحدة.

24 من اجل كل $n \geq 1$ نضع $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

1) بين أن $S_n = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

2) ما هي $\lim_{n\to+\infty}(S_n)$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ ؟

25 Z عدد مركب بحيث $Z = \left(2\sqrt{3}+2\right) + i\left(2\sqrt{3}-2\right)$

1) عين الأعداد الطبيعية n بحيث Z^n تخيليا صرفا.

2) عين الأعداد الطبيعية n بحيث Z^n حقيقيا سالبا. عبر عن Z^n بدلالة n .

26 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$

A ، B ، C ، D اربع نقط لواحقها على التوالي :

$a = 1$ ، $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

1) اكتب c على الشكل الأسي و d على الشكل الجبري.

2) أ) علم النقط A ، B ، C ، D في المعلم السابق.

ب) بين أن الرباعي $OACB$ عبارة عن معين.

27 نضع $Z = re^{i\theta}$ مع $r > 0$

و ليكن Z_n حيث $Z_n = (z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2) \times ... \times (z^n+\bar{z}^n)$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

1) احسب Z_3 و Z_4 بدلالة r و θ.

2) احسب Z_n بدلالة r و θ.

28 z_1 و z_2 عددان مركبان بحيث $|z_1| = |z_2| = 1$ عمدتاهما على التوالي α و β .

1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

2) بين أن $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ عدد حقيقي موجب تماما.

29 1) بين أن $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}$

2) استنتج من السؤال (1) قيمة كل من المجموعين S و T حيث :

$S = \sum_{k=0}^{4}\cos\frac{k\pi}{5}$ ، $T = \sum_{k=0}^{4}\sin\frac{k\pi}{5}$

30 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$

A و B نقطتان لاحقتاهما على التوالي -1 و 1.

M نقطة لاحقتها z_M حيث $z_M \neq 0$ ونسمي N النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z_M}$

1) بين أن $AN = \frac{AM}{OM}$

2) في كل ما يلي نفرض أن النقطة M تنتمي إلى دائرة مركزها B ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$

نضع $z_M=x+iy$ مع x و y حقيقيان.

أ) بين أن $x^2+y^2=2x+1$

ب) بين أن $|z_M+1|^2=2|z_M|^2$ ثم استنتج الطول AM بدلالة OM.

3) باستعمال السؤال (1) احسب الطول AN

4) أ) باستعمال نتيجة السؤال (2) بين أن $1-\frac{1}{z_M}=\frac{1}{|z_M|^2}(z_M+1)$

ب) استنتج أن الشعاعين $\overrightarrow{NB}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا.

- عين طبيعة الرباعي $ANBM$ إذا كانت النقطة M لا تنتمي إلى المستقيم (AB).

جـ) بين أنه إذا كان $|z_M|=1$ فإن $\left\|\overrightarrow{NB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AM}\right\|$ ثم حدد وضعيتي النقطة M الممكنة في كلتا الحالتين ثم عين طبيعة الرباعي $ANBM$.

31 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$4(1-\sin\theta)z^2-2(1+\cos 2\theta)z+1+\sin\theta=0$ ..... (I)

حيث θ من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

2) أوجد طويلة و عمدة حلول المعادلة (1) بدلالة θ.

32 عين الجذور التكعيبية للعدد المركب $4\sqrt{2}(1+i)$

ثم مثل صور هذه الجذور في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

33 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3-i=0$ .... (1)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) ثم اكتب الحلول على الشكل المثلثي.

2) z_0 و z_1 حلي المعادلة (1) يختلفان عن $(-i)$، احسب z_0+z_1 و $z_0\times z_1$.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3-i=6(z+1)$

34 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$.

35 ليكن $p(z)$ كثير حدود معرف كما يلي $p(z)=z^3-2z^2-iz+3-i$

1) بين أن المعادلة $p(z)=0$ لها حل حقيقي ثم حل المعادلة $p(z)=0$

2) لتكن C ، B ، A نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ لواحقها حلول المعادلة $p(z)=0$ حيث C فاصلتها (-1)

برهن أن النقطة O هي مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,3)\}$

36 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $a^2-2ia-1=0$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z:

$z^2-a(a+i)z+ia^3=0$ .... (1)

3) نضع $\arg(a)=\theta$ و $|a|=r$

احسب طويلة وعمدة حلي المعادلة (1) بدلالة r و θ.

37 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^2+(2i-1)z-1-i=0$ .... (1)

2) اكتب حلول المعادلة (1) على الشكل المثلثي.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^8+(2i-1)z^4-1-i=0$ .... (2)

38 $p(z)$ كثير حدود معرف كما يلي:

$p(z)=z^3+(7-4i)z^2+(9-16i)z-9-12i$

1) بين أن المعادلة $p(z)=0$ لها حل حقيقي z_0 عينه ثم اكتب $p(z)$ على الشكل $(z-z_0)(z^2+bz+c)$ حيث b و c عددان مركبان.

2) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، لتكن النقط C ، B ، A لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 حلول المعادلة $p(z)=0$ مع $|z_1|<|z_2|$

ما نوع المثلث ABC ؟

39 ليكن α عددا مركبا و $p_\alpha(z)$ كثير حدود معرف كما يلي:

$p_\alpha(z)=z^3-\bar{\alpha}z^2+\alpha z-1$

1) بين أنه إذا كانت z_0 ، z_1 ، z_2 حلولا للمعادلة $p_\alpha(z)=0$ فإن $z_0z_1z_2=1$

2) بين أنه إذا كان $p_\alpha(z)=0$ فإن $p_\alpha\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=0$

3) استنتج من السؤالين (1) و (2) أنه يوجد عدد مركب z بحيث $p_\alpha(z)=0$ و $|z|=1$

4) نفرض أن $|\alpha|=1$ ، حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p_\alpha(z)=0$.

5) استنتج حلول المعادلة $\sqrt{2}z^3-(1+i)z^2+(1-i)z-\sqrt{2}=0$

40 نعتبر كثير الحدود ذو المتغير المركب z التالي $p(z)=2z^3+14z^2+41z+68$

1) أ) بين أنه من أجل كل z يكون $p(z)=(z+4)(2z^2+6z+17)$

ب) حل المعادلة $p(z)=0$.

2) نرمز بـ z_1 ، z_2 ، z_3 إلى جذور $p(z)$
z_1 حقيقي و $\text{Im}(z_2) \rangle 0$.
نسمي النقط A ، B ، C لواحق z_1 ، z_2 ، z_3 على الترتيب.
أ) احسب $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ ماذا يمكن القول حول المثلث ABC ؟
ب) عين النقطتين D و E بحيث $BCDE$ مربع مركزه النقطة A .

41 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :
أ) $81z^4-1=0$ ، ب) $z^4+2z^2-3=0$
جـ) $3z^4+2z^2-5=0$ ، د) $-z^4-z^2+2=0$

42 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-10z+169=0$
2) لتكن المعادلة $z^4-10z^3+171z^2-10z+1=0$ .... (I)
أ) بين أن المعادلة (I) تكافئ المعادلة $a\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+b\left(z+\frac{1}{z}\right)+c=0$
حيث a ، b ، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) .

43 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4+7+24i=0$ .... (I)
1) ليكن $z_0=2-i$
بين أن المعادلة (I) تكافئ المعادلة $z^4-z_0^4=0$
2) اكتب $z^4-z_0^4$ على شكل جداء اربع كثيرات حدود من الدرجة الأولى ، ثم استنتج حلول المعادلة (I).
3) بين أن صور الحلول في المستوي المركب هي رؤوس مربع.

44 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+12=0$ .... (I)
1-أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) نرمز بـ u و $\overline{u}$ إلى حلول (I)
حيث يكون الجزء التخيلي لـ u موجبا.
ب) احسب طويلة وعمدة u ثم استنتج طويلة وعمدة $\overline{u}$.
2-1) لنعتبر العدد المركب $u-4$ اكتبه على الشكل الجبري ثم الأسي.
ب) احسب طويلة وعمدة العدد $\frac{u}{u-4}$ ثم استنتج طويلة وعمدة $\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$
ثم أنشئ صورة كل من u و $\overline{u}$.

45 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$ ، نسمي هذين الحلين z_1 و z_2 مع z_1 له جزء تخيلي موجب. اعط الشكل الأسي لـ z_1 و z_2 .

2) أ) علم في المستوي المركب النقطة A ذات اللاحقة 2 ، و B و C لاحقتاهما z_1 و z_2 و I منتصف $[AB]$
ب) برهن أن المثلث OAB متقايس الساقين ثم استنتج قيسا للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$
جـ) احسب اللاحقة z_I للنقطة I ثم طويلة z_I .
3) استنتج مما سبق القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

46 ليكن z عددا مركبا حيث $z=x+iy$ و $\overline{z}$ مرافقه و لنعتبر z' العدد المركب المعرف كما يلي $z'=z^2+z\overline{z}+i(z-\overline{z})-2i$
1) عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.
2) عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' تخيليا صرفا.

47 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، من أجل كل نقطة m ذات اللاحقة z غير المعدومة نرفق النقطة M ذات اللاحقة $z'=\frac{1}{z^2}$
نضع $z=re^{i\theta}$.
1) اكتب z' على الشكل الأسي.
2) نفرض أن z'_0 عدد مركب معطى غير معدوم.
هل دائما يوجد z_0 بحيث :
$z'_0=\frac{1}{z_0^2}$ ؟ هل هو وحيد ؟
3) نفرض في هذا السؤال أن z طويلته 1 .
أ) إذا كانت m معطاة أنشئ M .
ب) ما هي مجموعة النقط m بحيث $z'=z$ ؟
4) نرمز بـ (d^*) إلى نصف المستقيم الذي يمر من O ما عدا النقطة O .
أ) ما هي مجموعة النقط M لما m تمسح (d^*) ؟
ب) ما هي مجموعة النقط m لما M تمسح (d^*) ؟

48 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، من اجل كل نقطة m ذات اللاحقة z نرفق النقطة M ذات اللاحقة z' حيث :
$z'=\frac{z^3}{2+|z|^3}$ و $z=re^{i\alpha}$ و $z'=pe^{i\theta}$
1) عبر عن θ و p بدلالة r و α .

2) نرمز بـ (γ) إلى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 و T النقطة ذات اللاحقة $1-i$

أ) ما هي مجموعة النقط M لما m تمسح الدائرة (γ) ؟

ب) ما هي مجموعة النقط M لما m تمسح نصف المستقيم $[OT)$ ؟

3) لتكن f الدالة المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x^3}{2+x^3}$.

أ) ادرس تغيرات f ثم استنتج أن f متزايدة تماما على I وأن صورة I بالدالة f هي $[0,1[$

ب) استنتج أنه لما تكون m نقطة كيفية من المستوي المركب، فإن النقطة M هي من قرص يطلب تعيينه.

49 ليكن العدد المركب $z_0=\sqrt{2}(1+i)$

1) عين طويلة و عمدة z_0 و $\frac{1}{z_0}$.

2) علم في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس مباشر $(O , \vec{u} , \vec{v})$ النقطتين H و H' ذواتا اللاحقتين على الترتيب z_0 ، $\frac{1}{z_0}$.

3) لتكن M نقطة لاحقتها z حيث $z\neq 0$ وليكن M' لاحقتها $\frac{1}{z}$ وليكن D مرجح الجملة $\{(M,2),(M',1)\}$

احسب z' بدلالة z حيث D لاحقتها z'

4) حدد وضعية D لما $z=z_0$ ، ثم احسب z بحيث تكون D لاحقتها $\frac{1}{3}$.

5) بين أن الإحداثيتين (x , y) للنقطة D يمكن كتابتهما على الشكل :

$x=\frac{1}{3}\left(2r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta$ و $y=\frac{1}{3}\left(2r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$ حيث r و θ طويلة وعمدة z على الترتيب.

6) ما هي مجموعة النقط D لما M تمسح دائرة مركزها O ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

50 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O , \vec{u} , \vec{v})$

1) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $arg(z)+arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$

2) هل يوجد عدد مركب يحقق الشرطين :

$arg(z)+arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$ و $arg(z)-arg(z-1)=\theta$ ؟ مع $\theta\in[-\pi,\pi]$.

51 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j})$

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ و z' عدد مركب حيث $z'=\frac{z+i}{iz-2}$

1) عين و ارسم (γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

2) عين و ارسم (γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' تخيليا صرفا.

3) عين و ارسم (γ_3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون :

$arg(z')=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

4) عين مجموعة النقط ذات اللاحقة z بحيث $z'=z$.